

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 29 • HEFT 2 • MAI 1937

Die Greensche Funktion der Diracgleichung

Von J. Meixner

(Mit 1 Abbildung)

§ 1. Allgemeine Eigenschaften der Greenschen Funktion der Diracgleichung

Die Greensche Funktion der Diracgleichung läßt sich definieren als Lösung der Gleichung^{1), 2)}

$$(1) \quad \left(\vec{\gamma}, \text{grad} \right) - \gamma_4 \frac{E - V(P)}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} G_E(P, Q) = - \frac{\gamma_4}{\hbar c} \delta(P, Q)$$

$\delta(P, Q)$ = sogenannte Diracsche δ -Funktion; sie ist gleich Null, wenn $P \neq Q$,

$$\int \delta(P, Q) d\tau_P = 1$$

bei Integration über ein Gebiet, das den Quellpunkt Q enthält. E = Energieparameter, $V(P)$ = potentielle Energie, $E_0 = mc^2$ = Ruheenergie des Elektrons. Der Koeffizient von $\delta(P, Q)$ auf der rechten Seite von (1) ist dem Koeffizienten des Eigenwertparameters E auf der linken Seite gleichgesetzt.

Entwickelt man die Greensche Funktion nach Eigenfunktionen der Diracgleichung

$$(2) \quad \left(\vec{\gamma}, \text{grad} \right) - \gamma_4 \frac{E_i - V}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \psi_i(P) = 0,$$

so ergibt sich

$$(3) \quad G(P, Q) = \sum_i \frac{\psi_i(P) \psi_i(Q) \gamma_4}{E - E_i} + \int \frac{\psi_s(P) \psi_s(Q) \gamma_4}{E - s} ds.$$

Der Strich über ψ_i bedeutet die Bildung des adjungierten Ausdrucks zu ψ_i . Das kontinuierliche Spektrum ist in (3) in bekannter Weise durch ein Integral über den kontinuierlichen Eigenwertparameter

1) J. Meixner, Ztschr. f. Phys. 90. S. 312. 1934. Die dortigen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind durch $-\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3$ zu ersetzen, damit man die Bezeichnungen dieser Arbeit erhält. Das liegt daran, daß dort die Diracgleichung nicht mit der richtigen Zeitabhängigkeit zugrunde gelegt wurde.

2) Über das Rechnen mit den Operatoren γ ohne Zugrundelegung der Diracschen Darstellung durch vierreihige Matrizen vgl. F. Sauter, Ztschr. f. Phys. 63. S. 803. 1930 und 64. S. 295. 1930, sowie W. Franz, Sitzungsber. d. Bayer. Ak. d. Wissensch., math. naturwiss. Abt. S. 379, 1935.

berücksichtigt. Ersichtlich darf E weder dem diskreten, noch dem kontinuierlichen Spektrum angehören, da sonst die Darstellung (3) sinnlos wird.

Die Singularität der Greenschen Funktion für $P = Q$ ist bei der Diracschen Gleichung etwas anderer Art, als bei den sonst untersuchten Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Schwingungsgleichung, Schrödingersche Wellengleichung). Integriert man nämlich (1) über ein kleines Gebiet S , das den Quellpunkt Q enthält, und nimmt man an, daß grad $G_E(P, Q)$ in Q stärker unendlich wird als $G_E(P, Q)$, so ergibt sich nach Anwendung des Gaussschen Satzes

$$(4) \quad \lim_{S \rightarrow Q} \int_S \gamma_n d\sigma G_E(P, Q) = -\frac{\gamma_4}{\hbar c}.$$

Dabei ist γ_n die Normalkomponente des Vektors $\vec{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ zum Oberflächenelement $d\sigma$. Hieraus kann man auf folgendes Verhalten in der Nähe von Q schließen

$$(5) \quad G_E(P, Q) \approx -\frac{1}{4\pi r_2} \frac{1}{\hbar c} \gamma_r \gamma_4; \quad \gamma_r = \left(\vec{\gamma}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \gamma_1 \cdot \frac{x}{r} + \gamma_2 \cdot \frac{y}{r} + \gamma_3 \cdot \frac{z}{r}.$$

Man kann nun umgekehrt die Greensche Funktion unter Vermeidung der δ -Funktion für einen Energiewert E , der weder dem diskreten, noch dem kontinuierlichen Spektrum angehört, so definieren:

I. Sie genügt im ganzen Raum, außer im Punkte Q , der Differentialgleichung (1).

II. Im Punkte Q ist ihr Verhalten durch (4) oder (5) gegeben.

III. Im Unendlichen verschwindet sie stärker als $r_P Q^{-1}$.

Sei E^* konjugiert komplex zu E . Aus (1) und der dazu adjungierten Gleichung (Eigenschaft I.) für den Energiewert E bzw. E^* folgt dann in bekannter Weise mit Ausnahme der Punkte $P = Q$ und $P = Q'$

$$(6) \quad \operatorname{div} \overline{G_{E^*}(P, Q')} \vec{\gamma} G_E(P, Q) = 0,$$

$$(7) \quad \operatorname{div} \overline{G_E(P, Q')} \vec{\gamma} G_E(P, Q) = \overline{G_E(P, Q')} \gamma_4 G_E(P, Q) \cdot \frac{E - E^*}{\hbar c}.$$

Integriert man (6) über den ganzen Raum mit Ausnahme kleiner Kugeln mit den Mittelpunkten Q und Q' , verwandelt man das Raumintegral in ein Oberflächenintegral, so liefern nur die Oberflächen um Q und Q' einen nichtverschwindenden Beitrag, nicht aber das Oberflächenintegral im Unendlichen (wegen III.). Er berechnet sich aus (4) (Eigenschaft II.) und es wird

$$(8) \quad \overline{G_{E^*}(Q, Q')} \gamma_4 = \gamma_4 G_E(Q', Q).$$

Das ist die Symmetrieeigenschaft der Greenschen Funktion der Diracgleichung.

Gäbe es nun zum Quellpunkt Q zwei Greensche Funktionen $G_E^1(P, Q)$ und $G_E^2(P, Q)$, so würde aus (8) folgen, daß $G_E^1(Q, Q) = G_E^2(Q, Q)$ bei beliebigem Q . Damit ist gezeigt, daß die Eigenschaften I, II, III die Greensche Funktion eindeutig definieren, falls sie überhaupt existiert. Indessen soll uns die Existenzfrage im allgemeinen nicht beschäftigen, da in den für uns wichtigen Fällen die Existenz durch Berechnung der Greenschen Funktion erwiesen wird.

Die Beziehung (7) mit $Q' = Q$ liefert ein Maß für die Ergiebigkeit des Quellpunktes Q . Integriert man über den ganzen Raum mit Ausnahme einer kleinen Kugel um Q , so folgt für die Zahl der Elektronen, die pro Zeiteinheit aus der Quelle Q emittiert werden (n = äußere Normale, d. h. von Q wegweisend)

$$(9) \quad i c \int \overline{G_E(P, Q)} \gamma_n G_E(P, Q) d\sigma = i \frac{E^* - E}{\hbar} \int \overline{G_E(P, Q)} \gamma_4 G_E(P, Q) d\tau_P.$$

Ist der Imaginärteil von E positiv, bzw. negativ, so wird die Ergiebigkeit des Quellpunktes positiv bzw. negativ, da ja das Integral auf der rechten Seite von (9) als Wahrscheinlichkeitsdichte positiv ist.

Nun kann man E in das kontinuierliche Spektrum rücken lassen. Dann muß aber der Integrationsweg in der Darstellung (3) verschoben werden, so wie es in der Abb. 1 angedeutet ist; und zwar ergibt

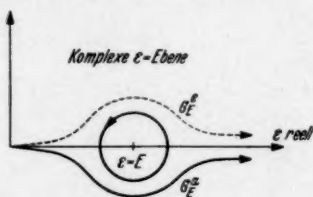


Abb. 1

sich der Weg a bzw. der Weg e , wenn der Imaginärteil von E vorher positiv, bzw. negativ war; d. h. aber, daß dem Integrationsweg a bzw. e Ausstrahlung bzw. Einstrahlung, anders ausgedrückt eine Elektronenquelle bzw. eine Elektronensenke in Q entspricht.

Es zeigt sich also, daß es zu einem *Energiewert des kontinuierlichen Spektrums* zwei verschiedene Greensche Funktionen gibt; denn bilden wir die Differenz $G_E^a(P, Q) - G_E^e(P, Q)$, so liefert die Darstellung (3) durch Residuenbildung im Punkte $\epsilon = E$ den Wert

$$- 2 \pi i \psi_E(P) \bar{\psi}_E(Q) \gamma_4,$$

also eine Eigenfunktion zum Eigenwert E des kontinuierlichen Spektrums. (Das gilt auch, wenn der Eigenwert E entartet ist.) Diese Zweideutigkeit kommt daher, daß die Eigenschaft III, die zum Eindeutigkeitsbeweis notwendig war, nicht mehr besteht. Um wieder Eindeutigkeit zu erzwingen, muß III durch die Ausstrahlungs- bzw.

Einstrahlungsbedingung ersetzt werden, die zuerst Sommerfeld¹⁾ im Falle der Schwingungsgleichung eingeführt hat. Man kann diese Bedingung einfach so aussprechen, daß die Greensche Funktion im Unendlichen das Verhalten einer Kugelwelle haben soll. Dieses Verhalten ist im Falle der Schwingungsgleichung $\frac{e^{\pm ikr}}{r}$, jedoch im Falle der Diracgleichung

$$\frac{e^{\pm ikr}}{r} \cdot \left[\pm ik\gamma_r - \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} - \frac{E_0}{\hbar c} \right] \Gamma,$$

wo Γ irgendein Operator ist, der die Diracschen Operatoren $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ enthält, und $k = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{E^2 - E_0^2}$; $\text{sign } k = \text{sign } E$. Dieses Verhalten ergibt sich, wenn man eine Lösung der Diracgleichung ohne Feld (d. h. $V \equiv 0$) sucht, die nur von r , γ_r und γ_4 abhängt. Nun gilt aber

$$\left[\pm ik\gamma_r - \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right] \left[\pm ik\gamma_r - \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} - \frac{E_0}{\hbar c} \right] = 0;$$

daher werden wir die Aus- bzw. Einstrahlungsbedingung so formulieren:

III.

$$(10a) \quad \begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[+ik\gamma_r - \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right] G_E^a(P, Q) = 0; \\ r \cdot G_E^a(P, Q) = \text{beschränkt für } r \rightarrow \infty, \end{cases}$$

$$(10e) \quad \begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[-ik\gamma_r - \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right] G_E^e(P, Q) = 0; \\ r \cdot G_E^e(P, Q) = \text{beschränkt für } r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$(10') \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \overline{G_E(P, Q)} \left(\pm ik\gamma_r - \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) G_E(P, Q') = 0,$$

$$(10'') \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \overline{G_E(P, Q)} \gamma_4 \left(\pm ik\gamma_r - \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) G_E(P, Q') = 0,$$

$$(10''') \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \overline{G_E(P, Q)} \left(\pm ik\gamma_r - \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) \gamma_4 G_E(P, Q') = 0.$$

In diesen drei Beziehungen ist bei Wahl des oberen bzw. unteren Zeichens zu G_E jeweils der Index a bzw. e hinzuzufügen. Die letzte

1) A. Sommerfeld, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 21. S. 309. 1913. Unsere Methode zur Herleitung der allgemeinen Eigenschaften der Greenschen Funktion der Diracschen Wellengleichung entspricht der Sommerfeldschen Methode bei der Schwingungsgleichung; insbesondere ist die sog. Diracsche δ -Funktion nichts anderes als die Funktion, die bei Sommerfeld mit Zackenfunktion bezeichnet ist.

Gleichung ist die adjungierte zur vorletzten. Hieraus folgt weiter für die Zahl der Elektronen, die in der Zeiteinheit durch irgendeine geschlossene Fläche um den Quellpunkt nach außen treten ($v > 0$):

$$\begin{aligned} i c \int \overline{G_E(P, Q)} \gamma_r G_E(P, Q) d\sigma &= \pm \frac{c \sqrt{E^2 - E_0^2}}{|E|} \int \overline{G_E(P, Q)} \gamma_4 G_E(P, Q) d\sigma \\ &= \pm v \int \overline{G_E(P, Q)} \gamma_4 G_E(P, Q) d\sigma. \end{aligned}$$

Dies ergibt sich sofort, wenn man (10') und (10'') addiert und in (10') einsetzt.

Also ermöglicht die obige Übereinkunft über das Vorzeichen von k sowohl für positive als auch für negative Energien E die Gleichungen (10a) bzw. (10e) als Ausstrahlungs- bzw. Einstrahlungsbedingung zu bezeichnen.

Die Symmetrieeigenschaft (8) geht nun über in

$$(11) \quad \overline{G_E^c(Q, Q')} \gamma_4 = \gamma_4 G_E^a(Q', Q).$$

Der frühere Beweis, der von (6) ausging, kann wörtlich wiederholt werden, wenn in (6) G_E^a statt G_E und G_E^c statt G_E geschrieben wird; nur ist das Verschwinden des Oberflächenintegrals im Unendlichen

$$\int \overline{G_E^c(P, Q)} \gamma_r G_E^a(P, Q) d\sigma$$

jetzt mit Hilfe von III' statt von III zu zeigen. Dies folgt aber wegen (10a) und (10e) aus

$$\begin{aligned} &\lim_{r \rightarrow \infty} r \overline{G_E^c(P, Q)} \gamma_r \frac{2E_0}{\hbar c} r G_E^a(P, Q) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} r \overline{G_E^c(P, Q)} \gamma_r \left(-ik\gamma_r + \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) r G_E^a(P, Q) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \overline{G_E^c(P, Q)} \left(-ik\gamma_r - \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) \right] \gamma_r \cdot r G_E^a(P, Q) = 0. \end{aligned}$$

Aus der Symmetrieeigenschaft (11) folgt wieder wie früher, daß die Greensche Funktion aus I, II, III' eindeutig bestimmt ist.

Aus der Eindeutigkeit und aus I, II, III' folgt ferner, wenn der Stern die Bildung des konjugiert komplexen Ausdrucks bedeutet (im Gegensatz zum adjungierten):

$$(11') \quad G_E^a(P, Q)^* = G_E^c(P, Q);$$

denn beide Funktionen genügen derselben Differentialgleichung (1) und derselben Bedingung (10a).

Da der Ausdruck $\overline{G_E(P, Q)} \gamma_r G_E(P, Q)$ divergenzfrei ist mit Ausnahme der Punkte Q und Q' , so folgt weiter, wenn man einmal über

eine weit entfernte geschlossene Fläche, das andere Mal über zwei kleine Kugeln um Q und Q' integriert, mit Hilfe von (10a) bzw. (10e) und wegen (11) und (11')

$$(12) \quad \begin{cases} \pm \frac{v}{ic} \int G_E(P, Q) \gamma_4 G_E(P, Q') d\sigma = \int \overline{G_E(P, Q)} \gamma_4 G_E(P, Q') d\sigma \\ = \frac{1}{\hbar c} (\gamma_4 \overline{G_E(Q, Q')} - \overline{G_E(Q', Q)} \gamma_4) \\ = \frac{1}{\hbar c} \gamma_4 (G_E(Q, Q') - G_E^*(Q', Q)). \end{cases}$$

Dabei ist immer der Index a bzw. der Index b zu den G_E hinzuzufügen.

§ 2. Asymptotische Integration der inhomogenen Diracgleichung

Häufig ist die Aufgabe gestellt, eine „inhomogene Diracgleichung“

$$(13) \quad \left((\vec{\gamma}, \text{grad}) - \gamma_4 \frac{E - V(P)}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) \psi(P) = f(P)$$

zu integrieren. Ist E kein Eigenwert des diskreten oder kontinuierlichen Spektrums, so ist die Lösung gegeben durch

$$(14) \quad \psi(P) = -\hbar c \int G_E(P, Q) \gamma_4 f(Q) d\tau_Q.$$

Dies folgt ohne weiteres aus der Definition (1), wenn man beachtet, daß

$$\int \delta(P, Q) \cdot f(Q) d\tau_Q = f(P).$$

Die Lösung ist eindeutig, wenn man verlangt, daß sie im Unendlichen mindestens ebenso stark verschwindet wie die Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums. — Gehört jedoch E dem kontinuierlichen Spektrum an, so ist die Lösung nur bestimmt bis auf eine Eigenfunktion des kontinuierlichen Spektrums zum Eigenwert E . Unter diesen Lösungen gibt es zwei ausgezeichnete

$$(14a) \quad \psi^a(P) = -\hbar c \int G_E^a(P, Q) \gamma_4 f(Q) d\tau_Q,$$

$$(14e) \quad \psi^e(P) = -\hbar c \int G_E^e(P, Q) \gamma_4 f(Q) d\tau_Q.$$

Sie entsprechen einer Überlagerung von Kugelwellen, die von den Punkten Q mit zu $f(Q)$ proportionalen Amplituden ausgehen (Fall a), bzw. in sie münden (Fall e). Nur der erste Fall hat physikalische Bedeutung.

Physikalisch interessiert ferner die Funktion $\psi^a(P)$ häufig nur für große Entfernung des Punktes P vom Atom; es genügt also die Greensche Funktion für den Fall zu kennen, daß der Punkt P

(oder wegen (11) auch Q) in großer Entfernung vom Atom sich befindet, um die asymptotische Form von $\psi(P)$ zu finden. In diesem Sinne sprechen wir auch von einer „asymptotischen Integration“ der Gl. (13).

Eine Anwendung findet dies z. B. beim Bornschen Verfahren zur Berechnung der Streuung einer ebenen Welle von schnellen Elektronen an einem Potentialfeld $V(P)$. Das Potential wird als kleine Störung betrachtet. Dann liefert der Ansatz für die Wellenfunktion

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots$$

die Differentialgleichungen

$$(15') \quad \left((\vec{\gamma}, \text{grad}) - \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) \psi_0(P) = 0,$$

$$(15'') \quad \left((\vec{\gamma}, \text{grad}) - \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) \psi_1(P) = -\gamma_4 \frac{V(P)}{\hbar c} \psi_0(P).$$

ψ_0 ist die Diracsche Eigenfunktion einer ebenen Welle; ψ_1 berechnet sich nach (14a) zu

$$(16) \quad \psi_1 = \int G_E^a(P, Q) V(Q) \psi_0(Q) d\tau_Q,$$

d. h., jeder Punkt des Potentialfeldes ist Ausgangspunkt einer Streuwelle, deren Amplitude zu $V(Q) \cdot \psi_0(Q)$ proportional ist. Die Greensche Funktion $G_E^a(P, Q)$ ist in diesem Falle für die Gl. (15') zu berechnen¹⁾:

$$(17) \quad G_E^a(P, Q) = \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} \left(\gamma_{r_{PQ}} \left(ik - \frac{1}{r_{PQ}} \right) - \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} - \frac{E_0}{\hbar c} \right) \frac{\gamma_4}{\hbar c};$$

dabei ist

$$\gamma_{r_{PQ}} = \left(\vec{\gamma}, \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q}{r_{PQ}} \right).$$

Zur asymptotischen Integration kann in $ik - \frac{1}{r_{PQ}}$ das zweite Glied vernachlässigt werden. Setzt man (17) in (16) ein, so ergibt sich die bekannte Darstellung der Streuwelle. Die Ausrechnung sei nicht durchgeführt; sie steht in ähnlicher Form bei F. Sauter²⁾.

§ 3. Näherungsweise Berechnung der Greenschen Funktion der Diracgleichung aus der Greenschen Funktion der Schrödingergleichung

Wir multiplizieren (1) von links mit dem Operator

$$(\vec{\gamma}, \text{grad}) - \gamma_4 \frac{E - V(P)}{\hbar c} - \frac{E_0}{\hbar c}$$

1) J. Meixner, a. a. O.

2) F. Sauter, Ztschr. f. Phys. 86. S. 818. 1933.

und entwickeln die Greensche Funktion¹⁾

$$(18) \quad G_E(P, Q) = G_E^0(P, Q) + G_E^1(P, Q) + \dots,$$

so daß

$$(19) \quad \begin{cases} \left(\Delta + \frac{E^2 - E_0^2 - 2E V(P)}{\hbar^2 c^2} \right) G_E^0(P, Q) \\ = - \frac{1}{\hbar c} \left((\vec{\gamma}, \text{grad}) - \gamma_4 \frac{E - V(P)}{\hbar c} - \frac{E_0}{\hbar c} \right) \gamma_4 \delta(P, Q), \end{cases}$$

$$(20) \quad \left(\Delta + \frac{E^2 - E_0^2 - 2E V(P)}{\hbar^2 c^2} \right) G_E^1(P, Q) = \gamma_4 \left(\vec{\gamma}, \text{grad} \frac{V(P)}{\hbar c} \right) \cdot G_E^0(P, Q).$$

Wir führen ferner die Greensche Funktion der Schrödingergleichung ein durch

$$(21) \quad \left(\Delta + \frac{E^2 - E_0^2 - 2E V(P)}{\hbar^2 c^2} \right) G_E^S(P, Q) = \delta(P, Q).$$

Sie enthält ersichtlich keine γ -Operatoren. Dann folgt

$$G_E^0(P, Q) = - \frac{1}{\hbar c} \int G_E^S(P, Q') \left((\vec{\gamma}, \text{grad}_{Q'}) \right. \\ \left. - \gamma_4 \frac{E - V(Q')}{\hbar c} - \frac{E_0}{\hbar c} \right) \gamma_4 \delta(Q', Q) d\tau_{Q'}.$$

Führt man im ersten Glied des Integranden eine partielle Integration aus, so ergibt sich

$$(22) \quad G_E^0(P, Q) = \frac{1}{\hbar c} \left((\vec{\gamma}, \text{grad}_Q) + \gamma_4 \frac{E - V(Q)}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) \gamma_4 G_E^S(P, Q).$$

Aus $G_E^0(P, Q)$ läßt sich nun nach dem Verfahren von Sommerfeld und Maue²⁾ $G_E^1(P, Q)$ unmittelbar bis auf eine Lösung X der homogenen Gleichung zu (20) angeben. Wir wollen aber zuerst eine Spezialisierung einführen, indem wir uns auf große Entfernung des Punktes Q beschränken. Zugleich wollen wir im folgenden nur den Fall der Ausstrahlungsbedingung berücksichtigen. Ferner sei vorläufig $V(P)$ im Unendlichen absolut integrierbar; dann ist aber (Beweis im Anhang 1), wenn $\text{Im } E \geq 0$

$$(23) \quad G_E^S(P, Q) \sim \frac{e^{ikr_Q}}{-4\pi r_Q} e^{-ik \frac{(\tau, r_Q)}{r_Q}} \cdot \chi(P).$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite stellt eine ebene Welle dar, die vom Quellpunkt Q herkommt; der dritte Faktor weicht

1) Das ist bei Atomproblemen immer eine Entwicklung nach Potenzen von αZ ; α = Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante.

2) A. Sommerfeld u. A. W. Maue, *Ann. d. Phys.* [5] **22**, S. 629. 1935.

von Eins nur durch die Anwesenheit des Potentials $V(P)$ ab. Also wird

$$\text{grad}_Q G_E^S(P, Q) \sim ik \cdot \frac{r_Q}{r_Q} G_E^S(P, Q).$$

$V(Q)$ kann in $G_E^0(P, Q)$ für weit entfernte Q vernachlässigt werden, so daß

$$(24) \quad G_E^0(P, Q) \sim \frac{1}{\hbar c} \left[ik \left(\vec{\gamma}, \frac{r_Q}{r_Q} \right) + \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right] \gamma_4 G_E^S(P, Q).$$

$G_E^1(P, Q)$ berechnet sich nach Sommerfeld und Maue zu

$$G_E^1(P, Q) = \gamma_4 \left(\vec{\gamma}, \text{grad}_P \frac{\hbar c}{2E} G_E^0(P, Q) + X \right).$$

Für X ist eine solche Lösung der homogenen Gleichung zu (19) zu wählen, daß $G_E^1(P, Q)$ klein von erster Ordnung ist gegen $G_E^0(P, Q)$. Das erreicht man aber, wenn man grad_P nur auf den dritten Faktor in (23) wirken läßt; denn wirkt grad_P auf den zweiten Faktor in (23), so entsteht eine Lösung der homogenen Gleichung zu (20), die sich gerade gegen X weghebt. Daher wird

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} G_E^0(P, Q) + G_E^1(P, Q) &\sim \frac{1}{\hbar c} \left[G_E^S(P, Q) + e^{-ik \frac{(r, r_Q)}{r_Q}} \right. \\ &\quad \cdot \frac{\hbar c}{2E} \gamma_4 \left(\vec{\gamma}, \text{grad}_P \right) e^{ik \frac{(r, r_Q)}{r_Q}} G_E^S(P, Q) \\ &\quad \cdot \left[ik \left(\vec{\gamma}, \frac{r_Q}{r_Q} \right) + \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right] \cdot \end{aligned} \right.$$

Dies ist die näherungsweise Darstellung der Greenschen Funktion der Diracgleichung, ausgedrückt durch die als bekannt vorausgesetzte Greensche Funktion der entsprechenden Schrödingergleichung.

Die Formel (25) gilt auch noch für den Fall des Coulomb-schen Potentials $V = -\frac{Ze^2}{r}$, das im Unendlichen gerade nicht mehr absolut integrierbar ist. Dann lautet die Greensche Funktion der Schrödingergleichung zur Ausstrahlungsbedingung¹⁾

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} G_E^S(P, Q) &\sim \Gamma(1+n) (-2ikr_0)^{-n} \frac{e^{ikr_0}}{-4\pi r_0} e^{-ik \frac{(r, r_0)}{r_0}} \\ &\quad \cdot F\left(-n, 1, ik\left(r + \frac{(r, r_0)}{r_0}\right)\right). \end{aligned} \right.$$

1) J. Meixner, Mathem. Ztschr. 36: S. 677. 1933.

Bei Zugrundelegung der Einstrahlungsbedingung ergibt sich der konjugiert komplexe Ausdruck. (Ein einfacher Beweis für (26) ist im Anhang 1 gegeben). Also wird aus (25)¹⁾

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} G_E^a(P, Q) &\sim \Gamma(1+n) (-2ikr_0)^{-n} \frac{e^{ikr_0}}{-4\pi r_0} e^{-ik \frac{(r, r_0)}{r_0}} \\ &\cdot \left[F\left(-n, 1, ik\left(r + \frac{(r, r_0)}{r_0}\right)\right) \right. \\ &+ \gamma_4 \frac{\hbar c}{2E} \left(\vec{\gamma}, \text{grad} F\left(-n, 1, ik\left(r + \frac{(r, r_0)}{r_0}\right)\right) \right) \Big] \\ &\cdot \frac{1}{\hbar c} \left[\left(\vec{\gamma}, \frac{r_0}{r_0} \right) ik + \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right] \gamma_4. \end{aligned} \right.$$

Umgekehrt erhält man, wenn P statt Q sehr weit vom Atom entfernt ist, wegen der Symmetrieeigenschaft (11) aus der Greenschen Funktion der Schrödingergleichung zur Einstrahlungsbedingung

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} G_E^a(P, Q) &\sim \frac{1}{\hbar c} \left[-\left(\vec{\gamma}, \frac{r}{r} \right) ik + \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right] \\ &\cdot \left[F\left(-n, 1, ik\left(r_0 + \frac{(r, r_0)}{r}\right)\right) \right. \\ &+ \gamma_4 \frac{\hbar c}{2E} \left(\vec{\gamma}, \text{grad}_Q F\left(-n, 1, ik\left(r_0 + \frac{(r, r_0)}{r}\right)\right) \right) \Big] \\ &\cdot \Gamma(1+n) (-2ikr)^{-n} \frac{e^{ikr}}{-4\pi r} e^{-ik \frac{(r, r_0)}{r}} \gamma_4. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist zur typographischen Vereinfachung

$$r_P = r, r_Q = r_0, n = \frac{\alpha Z}{i\beta} = \frac{\alpha Z E}{i\sqrt{E^2 - E_0^2}}$$

gesetzt. Diese Darstellung gilt für Energiewerte des positiven und des negativen kontinuierlichen Spektrums, wenn man beachtet, daß $\text{sign } k = \text{sign } E$.

§ 4. Anwendung der Greenschen Funktion bei der Behandlung der Störung durch eine Lichtwelle

Die allgemeine zeitabhängige Diracgleichung lautet

$$(29) \quad \left(\left(\vec{\gamma}, \frac{ie}{\hbar c} \vec{\Phi} + \text{grad} \right) + \gamma_4 \left(\frac{ie}{\hbar c} \Phi_4 + \frac{V}{\hbar c} + \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{E_0}{\hbar c} \right) \Psi = 0.$$

$\vec{\Phi}$ ist das Vektorpotential, $ie \Phi_4 + V$ das skalare Potential. Speziell setzen wir für $\vec{\Phi}, \Phi_4$ das Viererpotential einer monochromatischen, aber sonst zunächst beliebigen Lichtwelle ein.

1) Diese Funktion stimmt überein mit der in meiner Arbeit, Ztschr. f. Phys., a. a. O. nach einer anderen Methode abgeleiteten Funktion.

$$(30) \quad \begin{cases} \vec{\Phi} = \frac{1}{2} \mathfrak{A}_+ e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} \mathfrak{A}_- e^{+i\omega t}; & \mathfrak{A}_+^* = \mathfrak{A}_-; \\ \Phi_4 = \frac{1}{2} A_{4+} e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} A_{4-} e^{+i\omega t}; & A_{4+}^* = A_{4-}. \end{cases}$$

Dann läßt sich Ψ entwickeln nach Potenzen der Amplitude der Lichtwelle

$$(31) \quad \Psi = \psi_l \cdot e^{-\frac{i E_l t}{\hbar}} + W_+ \cdot e^{-\frac{i(E_l + \hbar\omega)t}{\hbar}} + W_- \cdot e^{-\frac{i(E_l - \hbar\omega)t}{\hbar}} + \dots$$

W_{\pm} ist von der ersten Ordnung in dieser Amplitude, die durch Punkte ange deuteten Glieder von höherer Ordnung. Dann gilt

$$(32) \quad \left((\vec{\gamma}, \text{grad}) - \gamma_4 \frac{E_l - V}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) \psi_l = 0,$$

$$(33) \quad \begin{cases} \left((\vec{\gamma}, \text{grad}) - \gamma_4 \frac{E_l \pm \hbar\omega - V}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) W_{\pm} \\ = -\frac{ie}{2\hbar c} \left((\vec{\gamma}, \mathfrak{A}_{\pm}) + \gamma_4 A_{4\pm} \right) \psi_l. \end{cases}$$

Physikalisch bedeutet W_+ die Wellenfunktion der Elektronen von der Energie $E_l + \hbar\omega$, die durch die Lichtwelle $\vec{\Phi}, \Phi_4$ aus dem Atomzustand l mit der Eigenfunktion ψ_l ausgelöst werden. W_- spielt nur dann eine Rolle, wenn $E_l - \hbar\omega$ in das negative kontinuierliche Spektrum fällt.

Die Funktion W_+ soll einer *ausstrahlenden* Elektronenwelle entsprechen und ist daher gemäß (14a) gegeben durch

$$(34) \quad W_+ = -\frac{ie}{2} \int G_E^a(P, Q) \gamma_4 \left((\vec{\gamma}, \mathfrak{A}_+(Q)) + \gamma_4 A_{4+} \right) \psi_l(Q) d\tau_Q,$$

$$(34') \quad E = E_l + \hbar\omega.$$

Für $G_E^a(P, Q)$ setzen wir den Ausdruck (28) ein und begehen damit nach Sommerfeld und Maue einen Fehler von der Größenordnung $\alpha Z = \frac{Z}{137}$.

Die gesamte Elektronenemission ist nach der Stromdefinition gegeben durch

$$\int S_r d\sigma = iec \int \bar{W}_+ \gamma_r W_+ d\sigma.$$

Setzt man (34) hier ein und führt in dem entstehenden 3fachen Integral (Integration über $d\sigma, d\tau_Q, d\tau_Q$) die Integration über $d\sigma$ nach (12) aus und beachtet man ferner, daß wegen (3) und Abb. 1:

$$G_E^a(P, Q) - G_E^*(P, Q) = -2\pi i \sum \psi_E(P) \bar{\psi}_E(Q) \gamma_4,$$

wo die Summe über alle linear unabhängigen orthogonalen Eigenfunktionen zum Energiewert E des kontinuierlichen Spektrums zu erstrecken ist, so ergibt sich

$$\int S_r d\sigma = \frac{\pi e^3}{2\hbar} \sum \left| \int d\tau_Q \bar{\psi}(Q) \left((\vec{\gamma}, \mathfrak{A}_+(Q)) + \gamma_4 A_{4+} \right) \psi_i(Q) d\tau_Q \right|^2.$$

Diese Formel benützt man immer dann, wenn einen die Richtungsverteilung der austretenden Elektronen nicht interessiert, wie bei der Berechnung des Absorptionskoeffizienten von Strahlung durch Photoeffekt¹⁾ oder wenn von vornherein keine ausgezeichnete Achse vorhanden ist, also der Elektronenstrom richtungsunabhängig ist, wie beim Photoeffekt in der Atomhülle durch Kern- γ -Strahlung²⁾ oder bei der Positronenerzeugung im Kernfeld durch Kern- γ -Strahlung³⁾ usw.

§ 5. Der Photoeffekt in der K -Schale bei harter anregender Strahlung

Das Vektorpotential einer ebenen monochromatischen Lichtwelle kann so geschrieben werden:

$$(35) \quad \mathfrak{A}_{\pm} = \alpha e^{\pm i(qr)}; \quad A_{4\pm} = 0.$$

q fällt in die Fortschrittingsrichtung der ebenen Welle, $|q| = q = \frac{\omega}{c}$; α hat die Richtung des elektrischen Vektors. Die normierte Eigenfunktion für die K -Schale und die Spinrichtung $-n$ lautet⁴⁾

$$(36) \quad \psi_i = \left(U + \left(\vec{\gamma}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right) V \right) \left(1 - (\vec{\sigma}, \mathbf{n}) \right) (1 + \gamma_4).$$

$\vec{\sigma}$ ist der Operator des Spins $= \frac{1}{i} \{ \gamma_2 \gamma_3, \gamma_3 \gamma_1, \gamma_1 \gamma_2 \}$. In ausreichender Näherung für die folgende Rechnung ist

$$(37) \quad U = N_i e^{-br}; \quad V = \frac{1}{2} \alpha Z N_i e^{-br}; \quad N_i = b^{1/2} \pi^{-1/2}.$$

Die Größe b , die zunächst als Parameter betrachtet wird, soll schließlich den Wert $\frac{E_0}{\hbar c} \cdot \alpha Z$ erhalten. Wir führen noch einige Abkürzungen ein:

$$(38) \quad D = -\frac{ie}{2\hbar c} N_i \Gamma(1+n) (-2ikr)^{-n} \frac{e^{ikr}}{4\pi r},$$

$$(39) \quad \Gamma = -ik \left(\vec{\gamma}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c}.$$

1) H. R. Hulme, Proc. Roy. Soc. London (A) **133**. S. 381. 1931.

2) H. M. Taylor und N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. London (A) **142**. S. 215. 1933.

3) J. C. Jaeger und H. R. Hulme, Proc. Roy. Soc. London (A) **148**. S. 708. 1935.

4) F. Sauter, Ztschr. f. Phys. **97**. S. 777. 1935.

Der Operator Γ ist für Kugelwellen charakteristisch und steht immer links in der Wellenfunktion. Er hat die Eigenschaft

$$(40) \quad \Gamma i k \left(\vec{\gamma}, \frac{\tau}{r} \right) = \Gamma \cdot \left(\gamma_4 \frac{E}{\hbar c} - \frac{E_0}{\hbar c} \right).$$

Sie erlaubt es, Faktoren $\left(\vec{\gamma}, \frac{\tau}{r} \right)$, die in der Wellenfunktion unmittelbar rechts von Γ stehen, wegzuschaffen, bzw. solche hinzuzufügen. Setzen wir nun (36) und (28) in (34) ein, so entsteht

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} W_+ &= D \cdot \Gamma \cdot \int \left[1 + \gamma_4 \frac{\hbar c}{2E} \left(\vec{\gamma}, \text{grad}_Q \right) \right] F \left(-n, 1, i k \left(r_0 + \frac{(\tau, \tau_0)}{r} \right) \right) \\ &\quad \cdot e^{i(a\tau_0) - i k \frac{(\tau, \tau_0)}{r} - b\tau_0} \left(\vec{\gamma}, a \right) \\ &\quad \cdot \left(1 + \left(\vec{\gamma}, \frac{\tau_0}{r_0} \right) \cdot \frac{1}{2} \alpha Z \right) (1 - (\vec{\sigma}, n)) (1 + \gamma_4) d\tau_Q. \end{aligned} \right.$$

Die hier auftretenden Integrale sind im Anhang 3 ausgerechnet. Mit den dortigen Bezeichnungen ist, wenn man noch überall γ_4 nach rechts hinüberschiebt und mit $(1 + \gamma_4)$ vereinigt:

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} W_+ &= D \cdot \Gamma \cdot \left[J_1 \left(\vec{\gamma}, a \right) + \frac{1}{2} \alpha Z \cdot \left(\vec{\gamma}, a \right) \left(\vec{\gamma}, \vec{J}_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hbar c}{2E} J_3 \left(\vec{\gamma}, a \right) - \frac{\hbar c}{2E} \cdot \frac{1}{2} \alpha Z \left(\vec{J}_4 \left(\vec{\gamma}, a \right) \vec{\gamma} \right) \right] \\ &\quad \cdot (1 - (\vec{\sigma}, n)) (1 + \gamma_4). \end{aligned} \right.$$

Es läßt sich nun leicht nachrechnen, daß (42) mit der von Sauter¹⁾ berechneten Funktion identisch ist und zwar liefern die Glieder mit J_1 und J_2 die Ausdrücke (22), die mit J_3 und J_4 die Ausdrücke (24) der Sauterschen Arbeit.

Wir wollen indessen hier direkt aus (42) den Strom der Photoelektronen für harte anregende Strahlung berechnen. Dazu bemerken wir, daß das Glied in (42) mit J_4 den Faktor αZ hat; J_4 enthält aber selbst schon die Größe $n = \frac{\alpha Z}{i\beta}$, die für $\beta \rightarrow 1$ von der Ordnung αZ ist, so daß wir das Glied in (42) mit J_4 vernachlässigen können gegenüber den anderen Gliedern.

J_3 drücken wir durch (3,3) aus, setzen für b seinen Wert ein, und statt J_1 können wir wegen (40) schreiben

$$- \frac{i k \hbar c}{E + E_0} \cdot J_1 \cdot \left(\vec{\gamma}, \frac{\tau}{r} \right) \left(\vec{\gamma}, a \right).$$

1) F. Sauter, Ann. d. Phys. [5] 11. S. 454. 1931.

Mit diesen Vernachlässigungen und Umformungen wird (42)

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} W_+ &= D \cdot F \cdot \left[-\frac{\hbar c i k}{2E} \cdot \frac{E - E_0}{E + E_0} \cdot J_1 \cdot \left(\vec{\gamma}, \frac{\vec{r}}{r} \right) \left(\vec{\gamma}, a \right) \right. \\ &\quad - \frac{i \hbar c}{2E} \left(\vec{\gamma}, q \right) \left(\vec{\gamma}, a \right) J_1 + \alpha Z \cdot \left(\vec{J}_2, a \right) \\ &\quad \left. + \frac{E - E_0}{E} \cdot \frac{1}{2} \alpha Z \cdot \left(\vec{\gamma}, \vec{J}_2 \right) \left(\vec{\gamma}, a \right) \right] (1 - (\vec{\sigma}, \vec{n})) (1 + \gamma_4). \end{aligned} \right.$$

Die Berechnung des Stromes der Photoelektronen sei nur kurz angedeutet. Es ist

$$(44) \quad S_r = i e c \bar{W}_+ \left(\vec{\gamma}, \frac{\vec{r}}{r} \right) W_+ = e v \bar{W}_+ \gamma_4 W_+.$$

Hierin setzt man (43) ein und drückt q , k , E durch die Geschwindigkeit $v = \beta c$ aus. Es ist

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & k &= \frac{m c}{\hbar} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & b &= \frac{m c}{\hbar} \alpha Z; \\ q &= \frac{m c}{\hbar} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \end{aligned} \right.$$

Dabei ergibt sich q aus der photoelektrischen Gleichung (34') für Emission aus dem Grundniveau

$$\hbar w = m c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2} \right) \approx m c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

Die Endformel für die Richtungsverteilung der Photoelektronen ergibt sich dann durch elementare algebraische Umformungen; sie sei jedoch nicht mehr angegeben, da sie natürlich mit der von Sauter gefundenen identisch ist. — Das Ziel dieses Paragraphen war ja nur zu zeigen, wie durch Anwendung der Greenschen Funktion die Ergebnisse der umfangreichen Sauterschen Arbeit über den Photoeffekt in der K -Schale bei harter anregender Strahlung auf kurzem Wege hergeleitet werden können.

Der Photoeffekt in der L -Schale bei harter anregender Strahlung ist nach der Sauterschen Methode von T. Muto¹⁾ behandelt worden. Auch hier gibt unsere Methode eine wesentliche Verkürzung der Rechnungen, wenn sie auch entsprechend den komplizierteren Endformeln umfangreicher sind als für die K -Schale.

Es sei noch auf die größere Übersichtlichkeit unserer Rechnungen hingewiesen, die ihren Grund darin hat, daß kein spezielles Koordinatensystem zugrunde gelegt wurde (Rechnung mit Vektoren) und daß insbesondere die Spinrichtung \vec{n} nicht wie üblich in die Fortschreitungsrichtung der Lichtwelle gelegt wird. —

1) T. Muto, Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. 18. S. 249. 1932.

Anhang

1. Die in der k -Skala normierten Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums der Schrödingergleichung lauten für $V = V(r)$, wenn $|V(r)|$ über den ganzen Raum integrierbar ist ($m = 0$):

$$(1, 1) \quad \psi_{kl} = R_{kl}(r) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta),$$

wo für große r asymptotisch

$$(1, 2) \quad R_{kl}(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos \left(kr - \frac{l+1}{2} \pi - \delta_l \right).$$

Speziell für $V(r) \equiv 0$ verschwinden alle δ_l .

Die Greensche Funktion zur Ausstrahlungsbedingung lautet, wenn wir den Quellpunkt auf die Achse $\vartheta_0 = 0$ legen (also $r_0 = \text{Polarachse}$):

$$(1, 3) \quad \left\{ \begin{aligned} G_{k_0}(P, Q) &= \int \frac{dk}{k_0^2 - k^2} \sum_l R_{kl}^*(r_0) P_l(\cos \vartheta_0) R_{kl}(r) P_l(\cos \vartheta) \\ &\quad \cdot \frac{2l+1}{4\pi} + \sum \dots, \end{aligned} \right.$$

wo $\sum \dots$ über die Eigenfunktionen des diskreten Spektrums zu erstrecken ist. Der Integrationsweg ist der Weg a der Abb. 1. Nun wird in der üblichen Weise¹⁾, wenn $r_0 > r$, $R_{kl}^*(r_0)$ in zwei sich asymptotisch wie Exponentialfunktionen verhaltende Teile aufgespalten und der Weg für die beiden Teile in die positiv bzw. negativ imaginäre Halbachse verschoben. Die Integrale längs der imaginären Halbachsen heben sich gegen den Beitrag des diskreten Spektrums zur Greenschen Funktion auf und es liefert nur der Pol $k = k_0$ einen Beitrag. Für große $r_0 \gg r$ gilt wegen (1, 2) (statt k_0 schreiben wir wieder k):

$$(1, 4) \quad G_k(P, Q) \sim \frac{e^{ikr_0}}{-4\pi r_0} \cdot \Phi(r, k, V(r)).$$

Die Funktion

$$(1, 5) \quad \Phi(r, k, V(r)) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l e^{-i\delta_l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{kl}(r) P_l(\cos \vartheta)$$

kommt in der Theorie der elastischen Streuung von Elektronen am Potentialfeld $V(r)$ vor. Sie hat allgemein für große r folgendes Verhalten: sie setzt sich aus einer ebenen Welle $e^{-ikr \cos \vartheta}$ und einer Kugelwelle zusammen. Der zweite Bestandteil verschwindet, wenn $V(r) \equiv 0$; der erste Bestandteil ist dann exakt eine ebene Welle (auch im Endlichen). Diese Funktion (1, 5) haben wir

in (23) mit $e^{-ik \frac{(r, r_0)}{r_0}} \cdot \chi(P)$ bezeichnet; also ist tatsächlich $\chi(P)$ gleich Eins für $V(r) \equiv 0$; $\chi(P)$ weicht um so stärker von Eins ab, je „stärker“ das Potentialfeld wird.

1) Vgl. A. Sommerfeld, a. a. O. oder J. Meixner, Mathem. Ztschr., a. a. O.

Im Falle des Coulombfeldes ist $|V(r)|$ im Unendlichen nicht mehr integrierbar. Dann ist¹⁾:

$$(1, 6) \quad \left\{ R_{kl} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k | \Gamma(l+1+n) | e^{\frac{\pi i n}{2}} (2kr)^l \frac{e^{-ikr}}{(2l+1)!} \cdot F(-n+l+1, 2l+2, 2ikr) \right.$$

Trotzdem läßt sich (1, 2) auch auf diesen Fall anwenden, indem wir setzen:

$$(1, 7) \quad \delta_l = -i n \lg 2kr_0 + \sigma_l.$$

Dabei ist:

$$(1, 8) \quad e^{i\sigma_l} = \frac{\Gamma(l+1-n)}{|\Gamma(l+1-n)|}.$$

Die Reihe (1, 5) wird damit:

$$(1, 9) \quad \left\{ e^{i\pi n/2} \cdot (2kr_0)^{-n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l+1+n)}{2l!} (-2ikr)^l e^{-ikr} \cdot F(-n+l+1, 2l+2, 2ikr) P_l(\cos \vartheta) \right.$$

Sie läßt sich nach Gordon²⁾ summieren zu

$$(1, 10) \quad \Gamma(1+n) (-2ikr_0)^{-n} e^{-ikr \cos \vartheta} F(-n, 1, ikr(1+\cos \vartheta))$$

und daher wird, wegen $(r, r_0) = r r_0 \cos \vartheta$:

$$(1, 11) \quad \left\{ G_k(P, Q) \sim \Gamma(1+n) (-2ikr_0)^{-n} \frac{e^{ikr_0}}{-4\pi r_0} e^{-ik \frac{(r, r_0)}{r_0}} \cdot F\left(-n, 1, ikr \left(r + \frac{(r, r_0)}{r_0}\right)\right) \right.$$

2. Die elastische Streuung einer ebenen Elektronenwelle an einem Feld mit dem Potential $V(P)$ wird durch die zugehörige Greensche Funktion beschrieben, deren Quellpunkt im Unendlichen liegt. — Die näherungsweise Darstellung (25) der Greenschen Funktion der Diracgleichung gestattet nun, allgemein, d. h. für beliebiges $V(P)$ (das nur im Unendlichen genügend stark verschwinden muß), eine näherungsweise Darstellung der Formel für die elastische Streuung nach der Diracgleichung zu geben, wenn die Streuformel für die Schrödingergleichung bekannt ist.

Die Funktion (23) des Aufpunktes P genügt überall (auch in beliebiger Entfernung vom Streuzentrum), der Gleichung:

$$(2, 1) \quad \left[\Delta + \frac{E^2 - E_0^2 - 2EV(P)}{\hbar^2 c^2} \right] \psi(P) = 0.$$

(2, 1) läßt sich umschreiben in die übliche Form der Schrödingergleichung, wenn man die Energie E durch die bewegte Masse $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ausdrückt ($v = \beta c$ ist die Geschwindigkeit des Elektrons in großer Entfernung vom Streuzentrum):

$$(2, 2) \quad \left[\Delta + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{1}{2} m v^2 - V(P) \right) \right] \psi(P) = 0.$$

1) Vgl. z. B. H. Bethe, Handbuch der Physik von Geiger-Scheel, 2. Aufl., Bd. 24/1, S. 289. Druckfehler! Dort steht in der asymptotischen Darstellung $l-1$ statt $l+1$.

2) W. Gordon, Ztschr. f. Phys. 48. S. 180. 1928.

Das ist aber formal die nicht-relativistische Schrödingergleichung, in der nur die Ruhmasse des Elektrons m_0 durch die bewegte Masse m ersetzt ist; denn die kinetische Energie $\frac{1}{2} m_0 v^2$ in großer Entfernung ist gleich der Gesamtenergie.

Demnach lautet die Formel für die elastische Streuung gemäß Gl. (2, 1) genau so wie gemäß der Schrödingergleichung, nur ist statt der Ruhmasse m_0 die bewegte Masse m zu setzen.

Wir berechnen nun die Streuformel, die sich aus der Näherung (25) der Greenschen Funktion ergibt.

Diese Näherung lautet, unter Weglassung von Faktoren, die nicht von P abhängen:

$$(2, 3) \quad G_E(P, Q) \text{ prop. } e^{-ik \frac{(r, r_0)}{r_0}} \left[\chi(P) + \frac{\hbar c}{2E} \gamma_4 \left(\vec{\gamma}, \text{grad } \chi(P) \right) \right] \cdot I_Q,$$

wo

$$I_Q = \bar{I}_Q = ik \left(\vec{\gamma}, \frac{r_0}{r_0} \right) + \gamma_4 \frac{E}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c}.$$

Diese Funktion kann in die ankommende ebene Welle und in die gestreute Kugelwelle zerlegt werden, und zwar entspricht dies einer Zerlegung von $\chi(P)$ in $\chi_1(P)$ und $\chi_2(P)$ mit folgendem asymptotischen Verhalten:

$$(2, 4) \quad \chi_1(P) \sim 1; \quad \chi_2(P) \text{ prop. } \frac{1}{r} e^{ik \left(r + \frac{(r, r_0)}{r_0} \right)}.$$

Daraus folgt asymptotisch:

$$(2, 5) \quad \text{grad } \chi_1(P) = 0; \quad \text{grad } \chi_2(P) = ik \left(\frac{r}{r} + \frac{r_0}{r_0} \right) \chi_2(P).$$

Demgemäß haben wir getrennt zu berechnen: den Strom S_1 , der der einfallenden ebenen Welle entspricht, indem wir in $G_E(P, Q)$ den Teil $\chi_1(P)$ beibehalten, und den Strom S_2 , der der gestreuten Kugelwelle entspricht, indem wir in $G_E(P, Q)$ den Teil $\chi_2(P)$ beibehalten. Es wird nach (44) [(44) gilt für ebene und für Kugelwellen]:

$$(2, 6) \quad S_1 = ev \bar{I}_Q \gamma_4 I_Q \cdot \chi_1^* \chi_1;$$

$$(2, 7) \quad \left\{ \begin{aligned} S_2 &= ev \cdot \bar{I}_Q \left[1 - \frac{\hbar c}{2E} ik \gamma_4 \left(\vec{\gamma}, \frac{r}{r} + \frac{r_0}{r_0} \right) \right] \gamma_4 \\ &\quad \cdot \left[1 + \frac{\hbar c}{2E} ik \gamma_4 \left(\vec{\gamma}, \frac{r}{r} + \frac{r_0}{r_0} \right) \right] I_Q \chi_2^* \chi_2. \end{aligned} \right.$$

Nun folgt aber unmittelbar aus der Definition von I_Q :

$$i \bar{I}_Q \vec{\gamma} I_Q = -\beta \frac{r_0}{r_0} \bar{I}_Q \gamma_4 I_Q.$$

Damit wird

$$S_2 = ev \bar{I}_Q \gamma_4 I_Q \chi_2^* \chi_2 \cdot \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \left(1 + \frac{(r, r_0)}{r r_0} \right) \right).$$

Bezeichnen wir wie üblich den Winkel zwischen r_0 und r mit $\pi - \Theta$ (Θ ist also der Ablenkungswinkel der von Q kommenden elastisch gestreuten Elektronen), so wird $\frac{(r, r_0)}{r r_0} = -\cos \Theta$ und

$$S_2 = ev \bar{I}_Q \gamma_4 I_Q \chi_2^* \chi_2 \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right).$$

Die gestreute Intensität drückt sich demnach so durch die einfallende aus:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{x_2^* x_2}{x_1^* x_1} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right).$$

$\frac{x_2^* x_2}{x_1^* x_1}$ ist aber das Verhältnis von gestreuter Intensität zur einfallenden

Intensität, wie es sich aus der Gl. (2, 1) bzw. (2, 2) berechnen würde. Also wird die durch die Diracsche Gleichung des Elektrons bedingte Formel für die elastische Streuung in erster Näherung folgendermaßen aus der Streuformel nach der unrelativistischen Schrödingergleichung gewonnen: Man ersetzt in der letzteren Streuformel die Masse m_0 durch die bewegte Masse m (bzw. den klassischen Impuls $m_0 v$ durch $m v$) und fügt den Faktor $1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ hinzu.

Dies gilt im ganzen Geschwindigkeitsbereich. Für den Bereich, in dem das Bornsche Verfahren angewandt werden kann, also für β nahe an 1, hat Sauter¹⁾ dasselbe Resultat erhalten.

Die Anwendung dieser Regel auf die Rutherfordsche Streuformel

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{e^2 Z}{2 m_0 v^2} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\vartheta}{2}$$

ergibt:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{e^2 Z}{2 m_0 v^2} \right)^2 \cdot (1 - \beta^2) \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \sin^{-4} \frac{\vartheta}{2},$$

in Übereinstimmung mit Mott²⁾.

3. Zur Berechnung von (41) benötigen wir die folgenden Integrale:

$$(3, 1) \quad \begin{cases} J_1 = \int F\left(-n, 1, ik\left(r_0 + \frac{(r, r_0)}{r}\right)\right) e^{i(q, r_0) - ik\left(r_0 \frac{r}{r}\right) - br_0} d r_0, \\ \vec{J}_2 = \int F\left(-n, 1, ik\left(r_0 + \frac{(r, r_0)}{r}\right)\right) e^{i(q, r_0) - ik\left(r_0 \frac{r}{r}\right) - br_0 \frac{r_0}{r_0}} d r, \\ J_3 = \int \left(\vec{r}, \text{grad}_{r_0} F\left(-n, 1, ik\left(r_0 + \frac{(r, r_0)}{r}\right)\right) \right) e^{i(q, r_0) - ik\left(r_0 \frac{r}{r}\right) - br_0} d r_0, \\ \vec{J}_4 = \int \left(\vec{r}, \text{grad}_{r_0} F\left(-n, 1, ik\left(r_0 + \frac{(r, r_0)}{r}\right)\right) \right) e^{i(q, r_0) - ik\left(r_0 \frac{r}{r}\right) - br_0 \frac{r_0}{r_0}} d r_0. \end{cases}$$

$\vec{J}_2, J_3, \vec{J}_4$ lassen sich alle auf J_1 zurückführen, denn es ist

$$(3, 2) \quad \vec{J}_2 = \frac{1}{i} \text{grad}_q \int_b^\infty J_1 db;$$

grad_q ist bezüglich q_x, q_y, q_z zu bilden. J_3 läßt sich durch eine partielle Integration umformen in

$$(3, 3) \quad J_3 = \left(\vec{r}, \left(ik \frac{r}{r} - iq \right) J_1 + b \vec{J}_2 \right).$$

1) F. Sauter, Ztschr. f. Phys. 86. S. 818. 1933.

2) N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. [A] 124. S. 425. 1929.

Schließlich ist

$$(3, 4) \quad \vec{J}_1 = \frac{1}{i} \operatorname{grad}_q \int_b^\infty J_s db.$$

Wir berechnen ausführlich J_1 , indem wir die Integraldarstellung

$$(3, 5) \quad F(-n, 1, u) = \frac{1}{2\pi i} \oint (\xi-1)^n \xi^{-n-1} e^{u\xi} d\xi$$

der entarteten (konfluenten) hypergeometrischen Funktionen einsetzen; der Integrationsweg führt im positiven Sinn um die Punkte $\xi = 0$ und $\xi = 1$. Die räumliche Integration wird in Polarkoordinaten r_0 , ϑ_0 , φ_0 ausgeführt. Dabei tritt das Integral

$$\int e^{i(q+k(\xi-1)\frac{r}{r}, r_0)} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 = 4\pi \cdot \frac{\sin r_0 \left| q + k(\xi-1)\frac{r}{r} \right|}{r_0 \cdot \left| q + k(\xi-1)\frac{r}{r} \right|}$$

auf. Die Integration über r_0 erfordert die Berechnung von

$$\int_0^\infty r_0 e^{-br_0} \sin \gamma r_0 dr_0 = \frac{2\beta\gamma}{(\beta^2 + \gamma^2)^2}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} J_1 &= -4i \oint d\xi (\xi-1)^n \xi^{-n-1} \frac{b - \xi i k}{\left[(b - \xi i k)^2 + \left| q + k(\xi-1)\frac{r}{r} \right|^2 \right]^{3/2}} \\ &= 2i \frac{\partial}{\partial b} \oint \frac{d\xi (\xi-1)^n \xi^{-n-1}}{(b^2 + k^2 + q^2 - 2kq \cos \vartheta) + 2k\xi(-ib - k + q \cos \vartheta)}, \end{aligned}$$

wenn mit ϑ der Winkel zwischen q und r bezeichnet wird, also $r \cdot q \cdot \cos \vartheta = (r, q)$. Dehnt man den Integrationsweg ins Unendliche, so kommt ein Beitrag vom Pol

$$\xi = \frac{(b^2 + k^2 + q^2 - 2kq \cos \vartheta)}{2k(ib + k - q \cos \vartheta)},$$

während vom Unendlichen kein Beitrag geliefert wird; denn dort verhält sich der Integrand wie ξ^{-2} . Residuenbildung liefert

$$(3, 6) \quad \begin{cases} J_1 = \frac{4\pi}{kq} \frac{\partial R}{\partial b}, \\ \text{wo} \\ R = -kq[(b - ik)^2 + q^2]^n [b^2 + k^2 + q^2 - 2kq \cos \vartheta]^{-n-1}. \end{cases}$$

Daraus folgt nach (3, 2) und wegen

$$\operatorname{grad}_q \cos \vartheta = \frac{1}{q} \frac{r}{r} - \left(q, \frac{r}{r} \right) \frac{q}{q^3}$$

nach kurzer Umrechnung

$$(3, 7) \quad \vec{J}_2 = \frac{4\pi i}{kq} \cdot q \frac{\partial}{\partial q} \frac{R}{q} + \frac{4\pi i}{kq^3} \left(\frac{r}{r} - \cos \vartheta \frac{q}{q} \right) \frac{\partial R}{\partial \cos \vartheta}.$$

Nach (3, 3) wird nach Ausführung der Differentiationen und Zusammenfassung

$$(3, 8) \quad \begin{cases} \vec{J}_3 = -8\pi i k n [(b - ik)^2 + q^2]^{-n-1} \\ \quad \cdot [b^2 + q^2 + k^2 - 2kq \cos \vartheta]^{-n-1} \left(\frac{r}{r} (b - ik) + i q, \vec{r} \right). \end{cases}$$

Wir führen nun mit Sauter, außer R , noch die Abkürzungen ein:

$$(3,9) \quad \begin{cases} S = P - Q \cdot \cos \vartheta = -i n \int_b^{\infty} \frac{R db}{(b - i k)^2 + q^2} \cdot \frac{b - i k}{i q}, \\ Q = -i n \int_b^{\infty} \frac{R db}{(b - i k)^2 + q^2}. \end{cases}$$

Dann läßt sich J_3 auch so schreiben:

$$(3,10) \quad J_3 = 8 \pi i \left[\left(\vec{r}, \frac{r}{r} \right) \frac{\partial S}{\partial b} + \left(\vec{r}, \frac{q}{q} \right) \frac{\partial Q}{\partial b} \right].$$

Also ist wegen (3,4):

$$(3,11) \quad \begin{cases} \vec{J}_4 = -8 \pi \text{grad}_q \left[\left(\vec{r}, \frac{r}{r} \right) S + \left(\vec{r}, \frac{q}{q} \right) Q \right] \\ = -8 \pi \left[\left(\vec{r}, \frac{r}{r} \right) \frac{\partial S}{\partial q} + \left(\vec{r}, \frac{q}{q} \right) \frac{\partial Q}{\partial q} \right] \frac{q}{q} \\ - \frac{8 \pi}{q} \left[\left(\vec{r}, \frac{r}{r} \right) \frac{\partial S}{\partial \cos \vartheta} + \left(\vec{r}, \frac{q}{q} \right) \frac{\partial Q}{\partial \cos \vartheta} \right] \left(\frac{r}{r} - \cos \vartheta \cdot \frac{q}{q} \right) \\ - \frac{8 \pi}{q} \left(\vec{r} - \frac{1}{q^2} (\vec{r}, q) q \right) Q. \end{cases}$$

Der Ausdruck $(\vec{J}_4, (\vec{r}, a) \vec{r})$, der in (42) auftritt, läßt sich noch teilweise auf J_3 zurückführen. Führt man nämlich in den beiden letzten Ausdrücken von (3,1) die Gradienten aus, so erkennt man, daß

$$(3,12) \quad (\vec{J}_4, \vec{r}) = \left(\vec{r}, \frac{r}{r} \right) J_3$$

wegen

$$\left(\vec{r}, \frac{r_0}{r_0} + \frac{r}{r} \right) \left(\vec{r}, \frac{r_0}{r_0} \right) = \left(\vec{r}, \frac{r}{r} \right) \left(\vec{r}, \frac{r_0}{r_0} + \frac{r}{r} \right).$$

Also ist:

$$(3,13) \quad \begin{cases} (\vec{J}_4, (\vec{r}, a) \vec{r}) = (\vec{J}_4, 2a - \vec{r}(a, \vec{r})) = 2(a, \vec{J}_4) - (\vec{J}_4, \vec{r})(a, \vec{r}) \\ = 2(a, \vec{J}_4) - \left(\vec{r}, \frac{r}{r} \right) J_3(a, \vec{r}). \end{cases}$$

Schließlich seien noch die folgenden Relationen angemerkt, die zur Umrechnung auf die Formeln von Sauter nützlich sind:

$$(3,14) \quad \begin{cases} i q \frac{\partial S}{\partial b} + \frac{\partial S}{\partial \cos \vartheta} + \cos \vartheta \frac{\partial Q}{\partial \cos \vartheta} + q \frac{\partial Q}{\partial q} + 2 Q = 0, \\ i q \frac{\partial Q}{\partial b} - \frac{\partial Q}{\partial \cos \vartheta} - \cos \vartheta \frac{\partial S}{\partial \cos \vartheta} + q \frac{\partial S}{\partial q} = 0. \end{cases}$$

Herrn Prof. Dr. A. Sommerfeld danke ich für sein Interesse an dieser Arbeit.

Gießen, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 15. Februar 1937)

**Ladungsverteilung
auf einem Zylinder zwischen zwei leitenden Ebenen
verschiedenen Potentials**

Von Erik Hallén

(Mit 6 Abbildungen)

Die Ladungsverteilung auf einem Zylinder vom Potential Null, der sich inmitten zweier Ebenen von den Potentialen $+V$ bzw. $-V$ befindet, wird berechnet und in Kurven als Funktion des Abstandes der Ebenen und des Zylinderhalbmessers dargestellt. Ebenso wird eine gewisse Kapazität des Systems, welche bei hochfrequenten elektromagnetischen Schwingungen in Spulen von Bedeutung ist, als Funktion des Abstandes angegeben.

Das elektrostatische Problem eines Zylinders zwischen zwei Ebenen verschiedenen Potentials unterscheidet sich wesentlich von dem gleichen Potentials, das von Masotti¹⁾ behandelt worden ist. Das hier behandelte Problem tritt in der Theorie der hochfrequenten Schwingungen in Drahtspulen auf. Während nämlich bei sehr großen Windungszahlen und nicht allzu schnellen Schwingungen oder wenn nur eine Orientierung angestrebt wird, die Spule als Zylinderfläche behandelt werden kann^{2, 3, 4, 5)}, wobei die spezielle Windungskapazität zwischen benachbarten Windungen belanglos ist, spielt diese Kapazität für eine genauere Kenntnis der Erscheinung eine um so größere Rolle, je hochfrequenter die Schwingung und je kleiner die Windungszahl ist. Nähere Einzelheiten über den Zusammenhang des hier aufgestellten elektrostatischen Problems mit den Schwingungen habe ich schon früher veröffentlicht⁶⁾.

Da unser Problem zweidimensional ist, brauchen wir nur einen Querschnitt senkrecht zur Zylinderachse zu betrachten. Hier legen wir (Abb. 1 und 3) ein Achsenkreuz mit der x -Achse parallel, der y -Achse senkrecht zu den beiden Äquipotentialebenen, deren Abstand $2d$ sei.

1) A. Masotti, Rend. d. reale acc. naz. dei Lincei 12. S. 519. 1930.

2) A. Sommerfeld, „Elektromagnetische Schwingungen“ in Riemann-Weber, Differentialgleichungen der Physik II. S. 518. 1927.

3) W. Lenz, Ann. d. Phys. 43. S. 749. 1914.

4) E. Hallén, Uppsala Universitets Årsskrift, Mat. o. Naturvetenskap Nr. 1. S. 67. 1930; Arkiv f. Mat. Astr. o. Fysik, Stockholm 24 A. Nr. 5. 1933.

5) H. Zuhrt, Archiv f. Elektrotechnik 27. S. 613, 729. 1933.

6) E. Hallén, Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsaliensis IV, 10. Nr. 2. 1936.

Zunächst suchen wir das Feld zweier Punktladungen $+m$ und $-m$, die sich symmetrisch in den Punkten $+y_0$ bzw. $-y_0$ der y -Achse befinden. Wenn wir noch die komplexe Veränderliche $z = x + iy$ einführen, haben wir eine analytische Funktion $f(z)$ zu suchen, die in den Umgebungen von $z = iy_0$ und $z = -iy_0$ bis auf endliche Glieder gleich

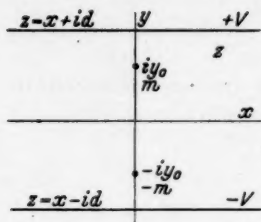


Abb. 1

$$\frac{m}{2\pi} \log \frac{1}{z - iy_0}$$

bzw.

$$-\frac{m}{2\pi} \log \frac{1}{z + iy_0}$$

ist¹⁾, und deren Realteil sich auf den Rändern des Streifens reduziert zu:

$$\operatorname{Re} f(x + id) = +V, \quad \operatorname{Re} f(x - id) = -V.$$

Der Realteil von $f(z)$ stellt dann im Streifen das Potential dar.

Die einfache Lösung dieses vorbereitenden Problems ist mir aus der Literatur nicht bekannt. Es sei deshalb hier die Herleitung in gedrängter Form mitgeteilt, wobei ich noch darauf hinweise, daß eine direkte Nachprüfung der unten erhaltenen Formel (3) sehr einfach ist.

Wenn

$$\psi_+(x) = V - \frac{m}{2\pi} \operatorname{Re} \log \frac{x + id + iy_0}{x + id - iy_0} = V - \frac{m}{4\pi} \log \frac{x^2 + (d + y_0)^2}{x^2 + (d - y_0)^2},$$

$$\psi_-(x) = -V - \frac{m}{2\pi} \operatorname{Re} \log \frac{x - id + iy_0}{x - id - iy_0} = -\psi_+(x)$$

und $g(z)$ diejenige im ganzen Streifen analytische Funktion ist, deren Realteil auf $z = x + id$ gleich ψ_+ und auf $z = x - id$ gleich ψ_- wird, so ist offenbar:

$$(1) \quad f(z) = g(z) + \frac{m}{2\pi} \log \frac{z + iy_0}{z - iy_0}.$$

Für $g(z)$ gibt es nun eine geschlossene Formel, die durch konforme Abbildung eines Kreises auf dem Streifen aus Poissons Formel hervorgeht, nämlich:

$$g(z) = \frac{1}{4d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_+(x) + \psi_-(x)}{\cosh \frac{\pi}{2d}(x-z)} dx - \frac{i}{4d} \sinh \frac{\pi z}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_+(x) - \psi_-(x)}{\cosh \frac{\pi x}{2d} \cosh \frac{\pi(x-z)}{2d}} dx,$$

1) Unter log verstehen wir überall natürliche Logarithmen. Rationale Einheiten werden benutzt.

wobei eine willkürliche, rein imaginäre Konstante addiert werden kann. In unserem Falle wird, weil $\psi_+ + \psi_- = 0$ ist und die konstanten Glieder $\pm V$ ein homogenes Feld geben müssen:

$$g(z) = -\frac{iV}{d}z + \frac{im}{8\pi d} \sinh \frac{\pi z}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \frac{x^2 + (d+y_0)^2}{x^2 + (d-y_0)^2}}{\cosh \frac{\pi x}{2d} \cosh \frac{\pi(x-z)}{2d}} dx.$$

Es ist nun:

$$\frac{\sinh \frac{\pi z}{2d}}{\cosh \frac{\pi x}{2d} \cosh \frac{\pi(x-z)}{2d}} = 2 \left(\frac{e^{\frac{\pi z}{d}}}{e^{\frac{\pi x}{d}} + e^{\frac{\pi z}{d}}} - \frac{1}{e^{\frac{\pi x}{d}} + 1} \right)$$

und bis auf eine imaginäre Konstante:

$$g(z) = -\frac{iV}{d}z + \frac{im}{4\pi d} \int_{\Gamma} \frac{e^{\frac{\pi z}{d}}}{e^{\frac{\pi \zeta}{d}} + e^{\frac{\pi z}{d}}} \log \frac{\zeta^2 + (d+y_0)^2}{\zeta^2 + (d-y_0)^2} d\zeta,$$

wo wir die komplexe Veränderliche ζ statt x eingeführt haben. Der Integrationsweg Γ ist zunächst die reelle Achse der ζ -Ebene; er kann aber nach Hinzufügung eines großen Halbkreises in der oberen ζ -Halbebene entsprechend Abb. 2 durch eine Folge geschlossener Kurven ersetzt werden, die den Schnitt $i(d-y_0)$ bis $i(d+y_0)$ und die Pole $\zeta = z + id(1+2n), n=0, 1, 2, 3, \dots$, einschließen. Der Schnitt liefert dann zum Integral den Beitrag:

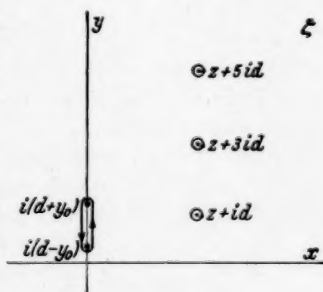


Abb. 2

$$\int_{i(d-y_0)}^{i(d+y_0)} 2\pi i \frac{e^{\frac{\pi z}{d}}}{e^{\frac{\pi \zeta}{d}} + e^{\frac{\pi z}{d}}} d\zeta = 2id \log \frac{\sinh \frac{\pi}{2d} (z - iy_0)}{\sinh \frac{\pi}{2d} (z + iy_0)} + b_0,$$

wo b_0 eine belanglose reelle Konstante ist. Die Pole liefern zum Integral den Beitrag:

$$\begin{aligned} & -2id \sum_{n=0}^{\infty} \log \frac{[z + id(1+2n)]^2 + [d+y_0]^2}{[z + id(1+2n)]^2 + [d-y_0]^2} \\ & = -2id \sum_{n=0}^{\infty} \log \frac{[z + id(1+2n) + i(d+y_0)][z + id(1+2n) - i(d+y_0)]}{[z + id(1+2n) + i(d-y_0)][z + id(1+2n) - i(d-y_0)]}. \end{aligned}$$

Wenn hier die Summe der Logarithmen durch den Logarithmus des Produktes aller Faktoren ersetzt wird, heben sich diese bis auf zwei auf und man erhält:

$$-2i d \log \frac{z - i y_0}{z + i y_0}$$

und somit:

$$(2) \quad g(z) = -i \frac{V}{d} z - \frac{m}{2\pi} \log \frac{(z + i y_0) \sinh \frac{\pi}{2d} (z - i y_0)}{(z - i y_0) \sinh \frac{\pi}{2d} (z + i y_0)}.$$

Aus (1, 2) ergibt sich:

$$(3) \quad f(z) = -i \frac{V}{d} z + \frac{m}{2\pi} \log \frac{\sinh \frac{\pi}{2d} (z + i y_0)}{\sinh \frac{\pi}{2d} (z - i y_0)}.$$

Wenn sich die Ladung m im willkürlichen Punkt $z = z_0$ befindet und gleichzeitig $-m$ im konjugierten Punkt \bar{z}_0 , ergibt sich durch Achsenverschiebung:

$$(3a) \quad f(z) = -i \frac{V}{d} z + \frac{m}{2\pi} \log \frac{\sinh \frac{\pi}{2d} (z - \bar{z}_0)}{\sinh \frac{\pi}{2d} (z - z_0)}.$$

Eine willkürliche imaginäre Konstante kann, der Natur des Problems gemäß, addiert werden.

Nach dieser Vorbereitung können wir auf unser eigentliches, sich auf den Zylinder beziehendes Problem übergehen. Der Radius des Zylinderschnittkreises mit der x, y -Ebene sei a . Den Mittelpunkt des Kreises verlegen wir in den Nullpunkt. Die Ladungsdichte ω

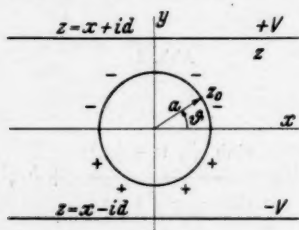


Abb. 3

auf dem Zylinder drücken wir durch ein trigonometrisches Polynom aus, das zufolge des Umstandes, daß die y -Achse Symmetrielinie und die x -Achse Symmetrielinie mit Umkehrung des Vorzeichens ist, folgende Form annimmt:

$$(4) \quad \omega = - \sum_{n=1}^m b_n \sin (2n - 1) \vartheta.$$

Das negative Vorzeichen haben wir deshalb angebracht, weil die obere Hälfte des Zylinders (Abb. 3) negativ geladen wird. Damit (4) exakt sei, muß im allgemeinen m unendlich sein. Endliches m gibt eine Näherungsdarstellung von ω .

Um aus (3a) eine der Massenbelegung (4) entsprechende Potentialfunktion zu gewinnen, haben wir nur in (3a) z_0 durch $a e^{i\vartheta}$ und m

durch $\omega a d \vartheta$ zu ersetzen und von Null bis π zu integrieren. Die komplexe Potentialfunktion des Problems wird somit:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} F(z) = & -i \frac{V}{d} z - \frac{a}{2\pi} \int_0^\pi \log \frac{\sinh \frac{\pi}{2d} (z - a e^{-i\vartheta})}{\sinh \frac{\pi}{2d} (z - a e^{i\vartheta})} \\ & \cdot \sum_1^m b_n \sin(2n-1) \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$(6) \quad F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

und φ das Potential des Feldes außerhalb des Zylinders ist.

Zwecks Auswertung von (5) gehen wir zunächst zur Feldfunktion dF/dz über. Wenn wir bemerken, daß der Integrand bei Vorzeichenwechsel von ϑ unverändert bleibt, erhalten wir nach einer einfachen Umformung:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dz} = & -i \frac{V}{d} - \frac{a}{4d} \int_0^{2\pi} \sum_1^m b_n \sin(2n-1) \vartheta \\ & \cdot \left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{d}(z - a e^{-i\vartheta})} - 1} - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{d}(z - a e^{i\vartheta})} - 1} \right) d\vartheta. \end{aligned}$$

Durch die Substitutionen $e^{-i\vartheta} = \zeta$ bzw. $e^{i\vartheta} = \zeta$ ergibt sich hieraus:

$$\frac{dF}{dz} = -i \frac{V}{d} + \frac{a}{4d} \int_{\Gamma} \sum_1^m b_n \frac{1 - \zeta^{4n-2}}{\zeta^{2n}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\pi}{d}(z - a\zeta)} - 1} d\zeta,$$

wobei Γ den Einheitskreis im positiven Sinne bedeutet. Weil wir $|z| > a$ voraussetzen wollen, ist der Nullpunkt der einzige umschlossene Pol. Man hat

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta^{2n}} \frac{1}{e^{\frac{\pi}{d}(z - a\zeta)} - 1} d\zeta &= -2\pi i \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \frac{1}{e^{\frac{\pi z}{d}} - 1} \\ &= -\pi i \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \coth \frac{\pi z}{2d} \end{aligned}$$

und somit von einer additiven imaginären Konstante abgesehen:

$$(7) \quad F(z) = -i \frac{V}{d} z - i \frac{\pi a}{4d} \sum_1^m b_n \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}} \coth \frac{\pi z}{2d},$$

wobei $\frac{d^0 f}{dz^0} = f$ zu setzen ist.

Das sich aus (6), (7) ergebende Potential φ erfüllt von selbst die Laplacesche Gleichung $\Delta \varphi = 0$ und nimmt auf den Streifenrändern die vorgeschriebenen Werte $\pm V$ an. Wir haben noch die Koeffizienten b_n so zu bestimmen, daß die letzte Randbedingung $\varphi = 0$ auf dem Kreis $|z| = a$ erfüllt wird. Ein direktes Entwicklungstheorem der Funktionen der Formel (7) dürfte schwierig zu finden sein. Die sich immer darbietende Möglichkeit der Orthogonalisierung ist ohne praktischen Nutzen. Es ist anscheinend am besten die Anzahl m der Reihenglieder zu begrenzen und die b_n in bester Weise zu bestimmen. Hierzu kann man verschiedene Wege einschlagen. Wir wollen den Thomsonschen Satz des Energieminimums benutzen¹⁾ und bei gegebener Zahl m die b_n so bestimmen, daß die elektrostatische Energie des Systems ein Minimum wird. Die exakte Ladungsverteilung für den Fall, daß a/d sehr klein wird, ist eine Sinusfunktion, d. h. ein eingliedriges trigonometrisches Polynom, und wir erhalten derart unmittelbaren Anschluß an diesen Grenzfall.

Zufolge der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die Funktionen φ und ψ befindet sich zwischen zwei Punkten der Randkurve $z = x + id$ die Ladung $e = \psi_1 - \psi_2$, wenn ψ_1 und ψ_2 die ψ -Werte dieser Punkte sind. Wir betrachten die Punkte $z = -R + id$ und $z = R + id$ (großes R) und erhalten aus (7) bei Unterdrückung aller Glieder, die exponentiell klein werden, für die dazwischenliegende Ladung:

$$e = 2 \frac{V}{d} R - \frac{\pi a}{4d} \operatorname{Re} b_1 a \left[\coth \frac{\pi}{2d} (-R + id) - \coth \frac{\pi}{2d} (R + id) \right] = 2 \frac{V}{d} R + \frac{\pi a^2}{2d} b_1,$$

woraus

$$V = \frac{d}{2R} \left(e - \frac{\pi a^2 b_1}{2d} \right).$$

Die gesamte Energie des Systems wird somit:

$$W = 2 \cdot \frac{1}{2} e \frac{d}{2R} \left(e - \frac{\pi a^2 b_1}{2d} \right) + \frac{1}{2} a \int_0^{2\pi} \omega V_1 d\vartheta,$$

wo V_1 das Potential auf dem Kreise $|z| = a$ ist. Wir setzen $W_0 = e^2 \frac{d}{2R}$ = Energie derselben Ladung auf den Ebenen ohne Zylinder, und erhalten, da mit wachsendem R der Quotient $\frac{ed}{2R}$ dem Wert V zustrebt:

$$(8) \quad W - W_0 = - \frac{\pi a^2 V}{2d} b_1 + \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \omega V_1 d\vartheta,$$

1) J. C. Maxwell, Proc. London math. soc. 9. S. 94. 1878, benutzte diesen Satz für ein elektrostatisches Problem, sonst dürfte er nicht viel benutzt worden sein.

wo die rechte Seite nur endliche Glieder enthält. Es ergibt sich nun aus (7):

$$(9) \quad V_1 = \frac{a}{d} V \sin \vartheta - \operatorname{Re} \frac{i \pi a}{4 d} \left(\sum_1^m b_n \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}} \coth \frac{\pi z}{2d} \right)_{z=ae^i}$$

und aus (4), (8) erhalten wir:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} W - W_0 &= -\frac{\pi a^2 V}{2d} b_1 - \frac{\pi a^2 V}{2d} b_1 \\ &+ \frac{\pi a^2}{8d} \operatorname{Re} i \int_0^{2\pi} \sum_1^m b_n \sin(2\nu-1)\vartheta \\ &\cdot \sum_1^m b_n \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!} \left(\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}} \coth \frac{\pi z}{2d} \right)_{z=ae^i} d\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Nun ist:

$$\coth \frac{\pi z}{2d} = \frac{2d}{\pi z} + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{B_{\mu}}{(2\mu)!} \left(\frac{\pi z}{d} \right)^{2\mu-1},$$

wo B_{μ} die Bernouillischen Zahlen sind: $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{5}{66}$... Somit wird:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}} \coth \frac{\pi z}{2d} &= \frac{2d(2n-2)!}{\pi z^{2n-1}} \\ &+ 2 \sum_{\mu=n}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{B_{\mu}(2\mu-1)!}{(2\mu)!(2\mu-2n+1)!} \left(\frac{\pi}{d} \right)^{2\mu-1} z^{2\mu-2n+1}, \end{aligned}$$

woraus:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{Re} \left(i \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}} \coth \frac{\pi z}{2d} \right)_{z=ae^i} &= \frac{2d \sin(2n-1)\vartheta}{\pi(2n-1)} \\ - \frac{2d}{\pi} \sum_{\mu=n}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{B_{\mu} \left(\frac{\pi a}{d} \right)^{2\mu}}{2^{\mu}(2n-1)!(2\mu-2n+1)!} \sin(2\mu-2n+1)\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Da nur $\mu = n + \nu - 1$ ein nichtverschwindendes Glied gibt, erhalten wir aus (10, 11):

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} W - W_0 &= -\frac{\pi a^2 V}{d} b_1 + \frac{\pi a^2}{4} \sum_1^m \frac{b_{\nu}^2}{2^{\nu-1}} \\ &- \frac{\pi a^2}{4} \sum_{\nu=1}^m b_{\nu} \sum_{n=1}^m b_n (-1)^{n+\nu} \frac{B_{n+\nu-1} \left(\frac{\pi a}{d} \right)^{2n+2\nu-2}}{2^{n+\nu-1}(2n-1)!(2\nu-1)!}. \end{aligned} \right.$$

Dieser Ausdruck wird ein Minimum, wenn die m Konstanten b_v aus den folgenden m linearen Gleichungen bestimmt werden:

$$(13) \quad \frac{2V}{d} \delta_v = \frac{b_v}{2^{v-1}} - \sum_{n=1}^m b_n (-1)^{n+v} \frac{B_{n+v-1} \left(\frac{\pi a}{d}\right)^{2n+2v-2}}{2(n+v-1)(2n-1)!(2v-1)!},$$

wo $\delta_1 = 1$ aber $\delta_v = 0$, wenn $v \neq 1$. Nach Ausklammern eines passenden Faktors der Determinante von (13) findet man die Lösung dieses Gleichungssystems in der Form:

$$(14) \quad b_v = \left(\frac{d}{\pi a}\right)^{2v} (2v-1)! \frac{D_{1v}}{D} \frac{2V}{d},$$

wo D eine Determinante aus m^2 Elementen a_{nv} ist, vom Betrag:

$$(15) \quad \begin{cases} a_{nv} = (-1)^{n+v-1} \frac{B_{n+v-1}}{2(n+v-1)}, & n \neq v, \\ a_{nn} = -\frac{B_{2n-1}}{2(2n-1)} + (2n-2)!(2n-1)! \left(\frac{d}{\pi a}\right)^{2(2n-1)} \end{cases}$$

und D_{1v} ihre Unterdeterminante erster Zeile v :ter Spalte ist.

Aus (14), (15) finde ich z. B. bei $m = 3$, wenn $\frac{d}{a} = x$ gesetzt wird:

$$(16) \quad \begin{cases} b_1 = \frac{2V}{d} \cdot \frac{T_1}{N} \\ b_2 = -\frac{2V}{d} \cdot \frac{\pi^4}{240} x^{-4} \frac{T_2}{N} = -0,4058712 \frac{2V}{d} x^{-4} \frac{T_2}{N} \\ b_3 = \frac{2V}{d} \frac{\pi^6}{6048} x^{-6} \frac{T_3}{N} = 0,1589599 \frac{2V}{d} x^{-6} \frac{T_3}{N} \end{cases}$$

$$N = 1 - \alpha_2 x^{-2} - \alpha_6 x^{-6} + \alpha_8 x^{-8} - \alpha_{10} x^{-10} + \alpha_{12} x^{-12} + \alpha_{16} x^{-16} - \alpha_{18} x^{-18}$$

$$T_1 = 1 - \alpha_6 x^{-6} - \alpha_{10} x^{-10} + \alpha_{16} x^{-16}$$

$$T_2 = 1 - \beta_{10} x^{-10}$$

$$T_3 = 1 + \gamma_6 x^{-6}.$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi^2}{12} = 0,8224670, \quad \alpha_{16} = \frac{169 \pi^{16}}{459841536000} = 0,0330885,$$

$$\alpha_6 = \frac{\pi^6}{3024} = 0,3179197, \quad \alpha_{18} = \frac{52489 \pi^{18}}{2433481408512000} = 0,0191663,$$

$$\alpha_8 = \frac{79 \pi^8}{3628800} = 0,2065680, \quad \beta_{10} = \frac{31 \pi^{10}}{15966720} = 0,1818213,$$

$$\alpha_{10} = \frac{\pi^{10}}{380160} = 0,2463385, \quad \gamma_6 = \frac{241 \pi^6}{604800} = 0,3830932,$$

$$\alpha_{12} = \frac{43 \pi^{12}}{201180672} = 0,1975517.$$

Nach diesen Formeln sind in Abb. 4 die Fourierkoeffizienten b_v als Funktionen von x gezeichnet worden.

Die Ladung e_1 der unteren Hälfte des Kreises wird wegen (4):

$$(17) \quad e_1 = a \int_0^\pi -\omega d\vartheta = 2a \left(b_1 + \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{5} \right).$$

In Abb. 5 habe ich die Kapazitätsgröße $\mu = \frac{e_1}{2V}$ dargestellt, die in der Theorie der Spulenschwingungen eine Rolle spielt.

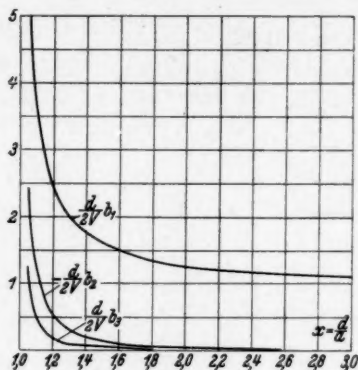


Abb. 4

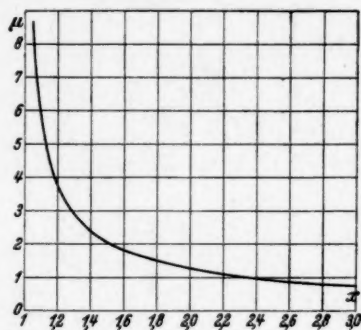


Abb. 5

Damit (14) exakte Gültigkeit habe, müssen die beiden Determinanten unendlich sein. Zur Berechnung der Genauigkeit, die wir durch Begrenzung der Elementenzahl erreicht haben, verfahren wir folgendermaßen. Aus (9), (11) wird:

$$V_1 = \frac{a}{d} V \sin \vartheta - \frac{a}{2} \sum_1^m \frac{b_n}{2n-1} \sin(2n-1)\vartheta + \frac{a}{2} \sum_{n=1}^m b_n \sum_{\mu=n}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu \left(\frac{\pi a}{d} \right)^{2\mu}}{2^\mu (2n-1)! (2\mu-2n+1)!} \sin(2\mu-2n+1)\vartheta.$$

Wenn wir V_1 in eine Fourierreihe umordnen:

$$V_1 = \sum_1^{\infty} c_\nu \sin(2\nu-1)\vartheta,$$

wird:

$$c_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_1 \sin(2\nu-1)\vartheta d\vartheta = \frac{a}{d} V \delta_\nu - \frac{a}{2} \cdot \frac{b_\nu}{2\nu-1} + \frac{a}{2} \sum_{n=1}^m b_n (-1)^{\nu+n} \frac{B_{\nu+n-1} \left(\frac{\pi a}{d} \right)^{2\nu+2n-2}}{2^{\nu+n-1} (2n-1)! (2\nu-1)!},$$

wo $b_\nu = 0$ zu setzen ist, wenn $\nu > m$ ist. Wegen (13) verschwindet nun c_ν für alle $\nu \leq m$. Unser Minimalprinzip zur Festlegung der Fourierkoeffizienten b_ν ist also damit gleichwertig, das Zylinderpotential V_1 so zu bestimmen, daß es die m ersten Fourierglieder nicht enthält.

Für V_1 bekommen wir also den Ausdruck:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} V_1 &= \sum_{\nu=m+1}^{\infty} c_\nu \sin(2\nu-1)\vartheta, \\ c_\nu &= \frac{a}{2} \sum_{n=1}^m b_n (-1)^{\nu+n} \frac{B_{\nu+n-1} \left(\frac{\pi a}{d} \right)^{2\nu+2n-2}}{2(\nu+n-1)(2n-1)!(2\nu-1)!}. \end{aligned} \right.$$

Wir bilden den quadratischen Mittelwert V_{10} von V_1 :

$$(19) \quad V_{10} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_1^2 d\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{\nu=m+1}^{\infty} c_\nu^2}.$$

Es ist nun:

$$B_{\nu+n-1} \pi^{2\nu+2n-2} = \frac{(2\nu+2n-2)!}{2^{2\nu+2n-3}} S_{2\nu+2n-2},$$

wo

$$S_\mu = 1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \dots,$$

das sich mit wachsendem μ rasch 1 nähert. Die Reihe in (19) konvergiert somit gut. In unserem Falle mit $m=3$ finde ich für $x=1,05$ $V_{10}=0,065 V$; für $x=1,1$ $V_{10}=0,020 V$; für $x=1,2$ $V_{10}=0,004 V$; für $x=1,3$ $V_{10}=0,001 V$ und für größere x -Werte noch wesentlich kleinere V_{10} -Werte. Es ist V_{10} offenbar ein direktes Maß der Ungenauigkeit unserer Lösung. Durch Hinzufügung eines vierten trigonometrischen Polynomglieds würde man zu einem rund $4x^2$ -mal kleineren V_{10} kommen. Schon bei ziemlich kleinem $x = \frac{d}{a}$ geben aber, wie man sieht, drei Glieder in (4) gutes Resultat.

Im asymptotischen Fall, wenn Zylinder und Ebenen einander sehr nahe kommen ($x \rightarrow 1$), genügt aber unser dreigliedriges trigonometrisches Polynom (4), (16) nicht mehr. Über die approximative Grenzlösung teile ich, ohne die Rechnungen anzuführen, nur folgendes mit: Wenn nur die eine Ebene vorhanden wäre, und die Potentialwerte vertauscht würden, kann die Ladungsverteilung auf dem

Zylinder bekanntlich elementar berechnet werden. Die Ladungsdichte ist dann umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes r von einem gewissen Punkt der y -Achse innerhalb des Kreises mit dem y -Wert $\Delta = d - \sqrt{d^2 - a^2}$. In unserem Falle mit zwei Ebenen führen wir zwei solche Zentren ein (Abb. 6) und machen für das erste Glied der Ladungsverteilung den Ansatz:

$$(20) \quad \omega = k \left(\frac{1}{a^2 + \Delta^2 + 2a\Delta \sin \vartheta} - \frac{1}{a^2 + \Delta^2 - 2a\Delta \sin \vartheta} \right).$$

Für die entsprechende Potentialfunktion findet man in ähnlicher Weise wie früher:

$$F(z) = -i \frac{V}{d} z + \frac{m_2}{2\pi} \log \frac{\sinh \frac{\pi}{2d} (z - i\Delta)}{\sinh \frac{\pi}{2d} (z + i\Delta)},$$

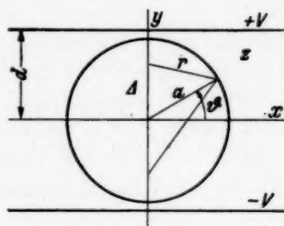


Abb. 6

wo $m_2 = \frac{2\pi k a}{a^2 - \Delta^2}$ ist. Die Ladung der unteren Hälfte des Zylinders wird:

$$(21) \quad e_2 = a \int_0^\pi -\omega d\vartheta = \frac{2m_2}{\pi} \arcsin \frac{2a\Delta}{a^2 + \Delta^2} = \frac{2m_2}{\pi} \arcsin \frac{a}{d}.$$

Begnügt man sich mit diesem einzigen Glied, so wird die elektrostatische Energie W gegeben durch:

$$W - W_0 = -2m_2 \frac{V\Delta}{d} + \frac{m_2^2}{2\pi} \log \left(\frac{a^2 + \Delta^2}{a^2 - \Delta^2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi\Delta}{d}}{\frac{\pi\Delta}{d}} \right),$$

was sein Minimum:

$$(22) \quad -m_2 \frac{V\Delta}{d} \quad \text{für} \quad m_2 = \frac{2\pi V\Delta}{d \log \left(\frac{a^2 + \Delta^2}{a^2 - \Delta^2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi\Delta}{d}}{\frac{\pi\Delta}{d}} \right)}$$

erreicht. Solange dieses Minimum algebraisch kleiner ist als das aus (12), (13) sich ergebende Minimum, nämlich:

$$W - W_0 = -\frac{\pi a^2 V b_1}{2d},$$

was für $x < x_0$, $1,1 < x_0 < 1,2$, eintritt, bleibt (20), (22) eine bessere Näherungslösung als das dreigliedrige trigonometrische Polynom (4), (16). Der Ausdruck (20) kann dann natürlich durch Hinzufügung von Fouriergliedern ähnlich wie früher verbessert werden.

Aus (21), (22) ergibt sich

$$\mu = \frac{e_2}{2V} = \frac{2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) \arcsin \frac{1}{x}}{\log \frac{\sin \pi \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{\pi \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}},$$

was sich asymptotisch für $x \rightarrow 1$ dem elementaren Grenzwert

$$\frac{\pi}{\log \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)}$$

nähert¹⁾.

1) E. Hallén, *Nova acta*, a. a. O.

Upsala, Sankt Persgatan 7.

(Eingegangen 10. Februar 1937)

**Die lichtelektrischen Eigenschaften
von Kaliumschichten atomarer Dicke auf Platin. I**

Von Herbert Mayer

(Mit 16 Abbildungen)

In zwei vorhergehenden kurzen Mitteilungen¹⁾ ist gezeigt worden, daß die Methode der Atomstrahlen und die zur Messung von Atomstrahlstärken mit Erfolg verwendete Ionisierung von Alkaliatomen an glühenden Metalloberflächen hoher Austrittsarbeit auch als Methode zur Herstellung und genauen Messung von Alkalisichten atomarer Dicke ausgebaut werden konnte²⁾. Sie ermöglicht es nicht nur, Alkalisichten beliebiger Dicke herzustellen und die Zahl der in ihnen enthaltenen Alkaliatome mit großer Genauigkeit anzugeben; sie gestattet auch eine Änderung der Aufdampfgeschwindigkeit innerhalb sehr weiter Grenzen, jederzeitige Unterbrechung des Aufdampfens und somit genaue Beobachtung der verschiedenen, bestimmten Schichtdicken entsprechenden oder zeitlich veränderlichen Eigenschaften.

Es wurde die lichtelektrische Empfindlichkeit von Kaliumschichten auf Platin in Abhängigkeit von der Schichtdicke für die Gesamtstrahlung einer Hg-Lampe und der Einfluß von weitgehendert Gasung von Träger- und aufgedampftem Metall auf die Empfindlichkeitskurven untersucht³⁾. Wegen der starken selektiven Empfindlichkeit von Kalium wurden die gleichen Messungen für einfarbiges Licht innerhalb und außerhalb des selektiven Bereiches durchgeführt.

Es wurden folgende Erscheinungen untersucht:

1. Der Verlauf der lichtelektrischen Empfindlichkeit für die Wellenlängen³⁾ des Hg-Bogens 6072, 5779, 5461, 4358, 4062, 3655, 3341, 3132, 2655, 2540 und 2480 für Kalium auf Platin für Schichtdicken von 0 bis über 100 Atomlagen.

2. Die Schichtdicke, bei der unter bestimmten Bedingungen ein erster Höchstwert des lichtelektrisch ausgelösten Elektronen-

1) H. Mayer, Phys. Ztschr. 36. S. 463. 1935; Ztschr. f. techn. Phys. 16. S. 451. 1935 oder Phys. Ztschr. 36. S. 845. 1935.

2) Eine Zusammenstellung anderer Methoden vgl. R. Suhrmann, Ergebnisse d. exakten Naturw. Bd. XIII, 1934.

3) Einzellinien und Liniengruppen.

austrittes beobachtet wird, und der Einfluß, den der Einbau von Gasmolekülen auf diese Schichtdicke bzw. auf den Höchstwert hat.

8. Die Abnahme der Austrittsarbeit von dem Werte für Platin auf den Wert für kompaktes Kalium in Abhängigkeit von der Bedeckung der Platinoberfläche mit Kaliumatomen.

4. Beginn und Entwicklung des spektralen selektiven Effektes. Dabei wurde jene Schichtdicke bestimmt, bei der der spektrale selektive Effekt sich auszubilden beginnt.

5. Lage des selektiven Höchstwertes in Abhängigkeit von der Schichtdicke und dem Gasgehalt.

6. Änderung der bestimmten Wellenlängen entsprechenden Empfindlichkeit bei unveränderter Schichtdicke, verursacht durch Wandern der Kaliumatome auf der Platinfläche.

7. Stromspannungskurven der aus Schichten verschiedener Dicke lichtelektrisch ausgelösten Elektronen. Obwohl der Apparat nicht für Messungen dieser Art gebaut war, können aus den so erhaltenen Kurven doch qualitative Schlüsse über die Geschwindigkeitsverteilung der aus Schichten verschiedener Dicke ausgelösten Elektronen gezogen werden.

8. Der Lichtvektoreffekt in Abhängigkeit von der Schichtdicke.

I. Herstellung der Schichten und Messung der Schichtdicke

Aus den aus dem Dampfraum des Atomstrahlrofens O (Abb. 1) kommenden und durch die Ofenblende B_1 (1 qmm) ins Hochvakuum austretenden Alkaliatomen wird durch die Blenden B_2 und B_3 ein schmales Bündel ausgeblendet. Diese Atome fallen auf die Platinfolie F , die so bemessen ist (3×7 qmm), daß sie den Querschnitt des Strahles fast ausfüllt. Die beim Glühen auf tieferer Temperatur befindlichen Endstücke der Folie F können von Atomen des Strahles nicht getroffen werden. Die Blende B_3 kann durch die Klappe K geschlossen werden, die Platinfolie F elektrisch ausgeheizt werden. Ist die Klappe K geöffnet und die Folie glühend (Temp. $> 1100^\circ \text{C}$), so verdampfen die aufprallenden Alkaliatome sofort wieder; dabei wird ein bestimmter Bruchteil von ihnen ionisiert¹⁾. Legt man an den Zylinder C eine negative Spannung von einigen Volt, so mißt ein zwischen F

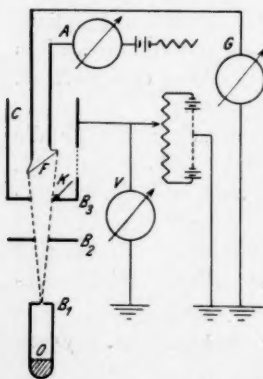


Abb. 1. Apparat (schematisch) und Schaltkizze

1) H. Mayer, Ztschr. f. Phys. (im Druck).

und C geschalteter Strommesser diesen positiven Ionenstrom i . Ist die Ausbeute der Ionisierung der Alkaliatome bekannt (Ionisierungsgrad k), so ist die Gesamtzahl der die Fläche F in der Zeiteinheit treffenden Alkaliatome $N_a = k \cdot i \cdot F$. Ist die Platinfolie auf Zimmertemperatur oder gekühlt, dann bleiben die auffallenden Alkaliatome haften und bauen eine mit der Zeit an Dicke gleichmäßig zunehmende Schicht auf¹⁾. Aus der bekannten Oberfläche der Folie und der durch Strommessung bestimmten in der Zeiteinheit aufgedampften Alkaliatomzahl folgt die Dicke der Schicht für jeden Zeitpunkt der Messung, wenn man bestimmte Annahmen über die Anordnung der Alkaliatome macht.

Durch Schließen der Klappe K kann eine zeitliche Änderung des Verhaltens von Schichten bekannter Dicke verfolgt werden. Durch Glühen der Folie F wird diese von der Alkalischiht wieder befreit. Die Zahl der in der Zeiteinheit auf die Fläche F fallenden Alkaliatome kann in mehrstündigen Beobachtungsreihen bis auf wenige Prozent unverändert gehalten werden (Überwachung von Heizstrom und Temperatur des Atomstrahlrofens).

Der Ionenstrom zeigt für das Metallpaar Kalium-Platin sowohl in Abhängigkeit von der Temperatur der Folie (Abb. 2, b) als auch von der zwischen F und C liegenden Spannung (vgl. Abb. 3 der eingangs zitierten Arbeit) Sättigung. Es ist zu beachten, daß die Sättigung in Abhängigkeit von der Temperatur der Folie erst dann eintritt,

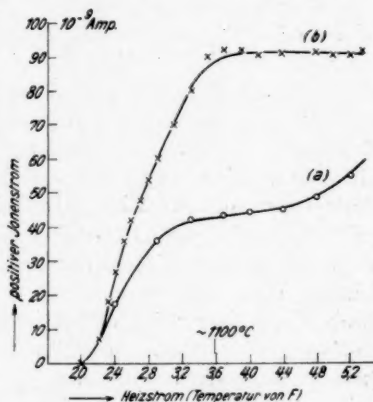


Abb. 2

1) Die Kaliumatome treten aus der Öffnung der Ofenblende B_1 nach dem Cos-Gesetz der Molekularstrahlung aus (H. Mayer, Ztschr. f. Phys. 52. S. 235. 1928). Die Zahl der in einer bestimmten Richtung fliegenden Atome nimmt also mit dem cos des Winkels, den diese Richtung mit der Achse des Strahles bildet, ab. Die auf F entstehende Alkalischiht wird nur dann gleichförmig sein, wenn der Öffnungswinkel des Strahles klein ist. In den vorliegenden Versuchen betrug er 4° , so daß die Zahl der am Rande des Strahles fliegenden Kaliumatome nur um 1% kleiner war als die der in der Achsenrichtung fliegenden.

wenn diese mehrere Stunden im Hochvakuum geglüht wurde¹⁾; eine nicht genügend geglühte Folie gibt die Stromtemperaturkurve *a* der Abb. 2. Es wurde außerdem beobachtet, daß die Ausbeute der Ionisierung ansteigt, je länger das Glühen der Folie *F* dauerte. Sobald vollkommene Sättigung des Ionenstromes erreicht ist, ändert sich auch der Ausbeutekoeffizient der Ionisierung nicht mehr.

Um die Schichtdicke in Einheiten einatomiger Schichten angeben zu können, sind bestimmte Annahmen über die Zahl der in einer solchen Schicht vorhandenen Atome und über die durch die „Rauhigkeit“ verursachte Vergrößerung der Oberfläche zu machen. Da diese Fragen an anderer Stelle ausführlich besprochen sind²⁾, soll hier nur kurz die in der vorliegenden Arbeit angewendete Berechnungsweise erwähnt werden.

In der auf der letzten Schicht der Platinatome sitzenden ersten Schicht der Kaliumatome wird die Anordnung der letzteren sicherlich durch die Anordnung der ersteren und durch das Verhältnis der Gitterkonstanten bestimmt sein. Da die Gitterkonstante des Kaliums (5,2 ÅE; flächenzentriert) viel größer als die des Platins (3,9 ÅE; flächenzentriert) ist, nimmt man an³⁾, daß in der, dem Platin unmittelbar aufsitzenden Kaliumschicht je ein Kaliumatom auf vier Platinatome kommt. Eine einatomige Schicht von Kaliumatomen auf Platin enthält dann $3,3 \cdot 10^{14}$ Atome je Quadratzentimeter. Dabei ist jedoch die Rauhigkeit der Platinoberfläche noch nicht berücksichtigt. Da Beobachtungen darüber nicht vorliegen, wird sie durch einen Faktor 1,2 berücksichtigt, der von Beobachtungen an Wolfram her stammt³⁾. So erhält man die Zahl $4 \cdot 10^{14}$ Atome je Quadratzentimeter⁴⁾. Die von der Platinoberfläche entfernteren Kaliumatomlagen werden die durch die Gitterkonstante des Kaliums bestimmte Atomzahl von $7,4 \cdot 10^{14}$ enthalten.

II. Apparat und Meßanordnung

Gegenüber dem früher verwendeten Apparat wurden Änderungen vorgenommen (Abb. 3), um gutes Vakuum sicherzustellen. Das Quarzfenster *Q* aus geschmolzenem Quarz war mit einem Quarz-Hartglas-Zwischenstück *Z* angeschmolzen. Die Blenden *B*₁ und *B*₂

1) Vgl. z. B. auch J. Langmuir, Phys. Rev. 44. S. 423. 1933. S. 430 über das „Altern“ ionisierender Metalloberflächen.

2) Vgl. z. B. J. Langmuir u. J. B. Taylor, Phys. Rev. 44. S. 423. 1934; J. A. Becker, Phys. Rev. 28. S. 341. 1926 u. a.

3) J. Langmuir u. J. B. Taylor, a. a. O.

4) Vgl. Fußnote 1 S. 141.

waren aus dünnem Platinblech hergestellt. Wegen der magnetisch zu betätigenden Klappe *K* konnte der Zylinder *C* nicht aus Vakuumnickel gemacht werden. Er bestand aus dünnem Cu-Blech, das durch das lange Glühen der Platinfolie *F* innen ganz platiniiert war. Da alle Zuführungen aus Wolframdraht ebenfalls eingeschmolzen und bis zur Diffusionspumpe keinerlei Schliffe oder Hähne eingebaut waren, wurde der ganze Apparat im elektrischen Ofen bei 500° C zuerst zwei Tage lang entgast, dann nach Einbringen des Kaliums

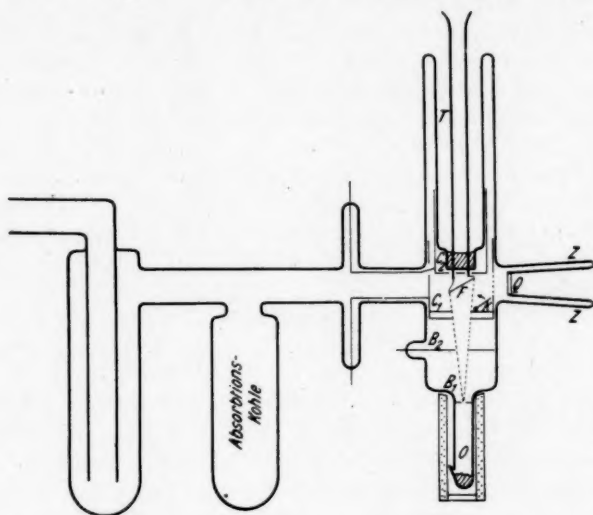


Abb. 3

in die Destillationsvorlage nochmals einige Stunden lang. Zwischendurch wurde die Folie *F* durch Glühen entgast. Vor Ende des Entgasens wurde an die vorher auch im Entgasungs-ofen befindliche Hg-Falle flüssige Luft gelegt, nach Entfernen des Ofens auch an den Behälter mit Absorptionskohle, und blieb bis zum Abschluß einer Meßreihe am Apparat, der ständig an den Hochvakuum-pumpen lag. Verschuß des Apparates während der Meßpausen erfolgte durch einen gut entgasten Hg-Verschuß. Das McLeodmanometer (Empf. $2 \cdot 10^{-6}$ mm Hg) zeigte immer mehrere Zentimeter „Hängevakuum“. Besondere Sorgfalt wurde auf die völlige Entgasung des Kaliums verwendet. Nur langsame Destillation im elektrischen Ofen bei genau überwachter Temperatur gab zufriedenstellende Ergebnisse, die schnelle Destillation mit der Gasflamme jedoch nicht.

Zwei Galvanometer von 10^{-11} und 10^{-9} Amp. Empfindlichkeit dienten zur Messung der positiven Ionenströme. Die lichtelektrischen Ströme wurden mit einem Quadrantenelektrometer Paschen-scher Bauart mit 1—2 Sek. Schwingungsdauer gemessen. Das eine Quadrantenpaar lag über einen hohen Widerstand an Erde. Höchste Empfindlichkeit: $3,5 \cdot 10^{-14}$ Amp. je Skalenteil.

Als Lichtquelle diente eine Hg-Punktlanpe. Da aus äußeren Gründen während dieser Untersuchung die Stärke der einzelnen Linien nicht gemessen werden konnte, wurde die Lampe immer bei der gleichen Belastung (14 Volt, 2,3 Amp.) gebrannt, außerdem die Entfernung der Lampe vom ersten Spalt auf 30 mm und die Spaltbreite auf 0,2 mm eingestellt, so daß die von Simon-Suhrmann gegebene relative Intensitätsverteilung zur Auswertung benutzt werden konnte. Die Strahlung einer bestimmten Wellenlänge wurde mit einem Quarzdoppelmonochromator¹⁾ ausgesondert und fiel nach Durchgang durch ein Glan-Thompsonprisma unter einem Winkel von 50 bis 60° auf die Folie *F*. Die Kühlung dieser Folie erfolgte mit CO₂-Schnee, in einigen besonders vermerkten Fällen mit flüssiger Luft (Kühlrohr *T*).

III. Ergebnisse

1. Die lichtelektrische Empfindlichkeit in Abhängigkeit von Wellenlänge und Schichtdicke des K auf Pt

Zunächst wird die Konstanz der Atomstrahlstärke festgestellt. Die Folie wird bei geschlossener Klappe *K* nahe der Schmelztemperatur kurz geglüht und so ihre Oberfläche gereinigt. Nach Ausschalten des Heizstromes kühlt die Folie in weniger als 60 Sek. soweit ab, daß alle auftreffenden Kaliumatome haften bleiben. Wird nach Ablauf dieser Zeit die Klappe *K* geöffnet, so zeigt der lichtelektrische Strom in Abhängigkeit von der Zeit, d. h. der Schichtdicke, die Kurven der Abb. 4 [Wellenlänge 4358 bei drei Atomstrahlstärken: $2,0 \cdot 10^{14}$ (Kurve *a*), $4,2 \cdot 10^{14}$ (Kurve *b*) und $9,5 \cdot 10^{14}$ Atome je Quadratzentimeter und min. (Kurve *c*)].

Der Elektronenaustritt beginnt erst bei einer ganz bestimmten Schichtdicke ziemlich plötzlich. Schließt man, sobald eine bestimmte Schichtdicke erreicht ist, die Klappe *K*, so beobachtet man die bei unveränderter Schichtdicke durch Umlagerung der Kaliumatome oder durch Adsorption von fremden Gasmolekülen verursachten Änderungen. Durch Umlagerung der Kaliumatome verursachte Abnahme der lichtelektrischen Empfindlichkeit²⁾ zeigt der Verlauf der Kurven *a*

1) Gebaut im Physik. Inst. d. Univ. München durch Herrn Werkmeister Scharf.

2) Kühlung der Folie *F* mit CO₂-Schnee.

und *b* in Abb. 4 nach Schließen der Klappe *K*. Auf dieses Ergebnis wird weiter unten näher eingegangen.

Dem lichtelektrischen Verhalten des Kaliums entsprechend soll der Bereich der zwischen 6000 und 2400 ÅE gelegenen stärkeren Linien des Hg-Bogens in drei Gruppen geteilt und das Verhalten der lichtelektrischen Empfindlichkeit für die Linien jeder dieser Gruppen gesondert erörtert werden.

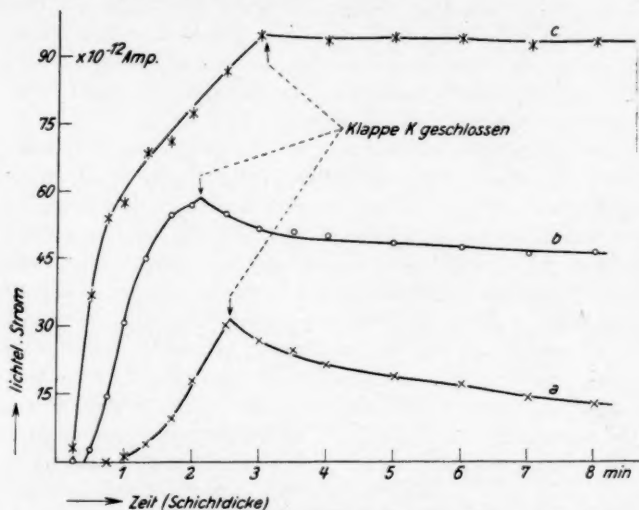


Abb. 4. Lichtelektrische Empfindlichkeit für 4358 in Abhängigkeit von der Schichtdicke des K und Änderung der Empfindlichkeit bei gleichbleibender Dicke nach Schließen der Klappe. $E \perp$

Kurve a:	Stärke des Atomstrahles	$2,0 \cdot 10^{14}$	} Atome je qcm und min.
" b:	" "	$4,2 \cdot 10^{14}$	
" c:	" "	$9,5 \cdot 10^{14}$	

A. Die der Grenzwellenlänge des kompakten Kaliums
naheliegenden Linien 6072, 5779, 5461 ÅE

Diese drei Linien zeigen bei fortschreitendem Entgasen durch Glühen von *F* das gleiche Verhalten. Als Beispiel sind in Abb. 5 die für λ 5779 erhaltenen Ergebnisse angeführt. Wird der allererste Versuch so gemacht, daß man vor Aufdampfen der ersten Kaliumschicht die Folie nicht zu lange glüht und vor allem den Kaliumatomen nicht in glühendem Zustand aussetzt, so erhält man die Kurve *I* der Abb. 5: einen sehr geringen, an der Meßgrenze liegenden Strom, der über einen kaum merklichen Höchstwert wieder abfällt. Versucht man nach Aufnahme dieser lichtelektrischen Kurve die

Stärke des Atomstrahles zu messen, so stellt man einerseits (vgl. oben) schlechte Sättigung des positiven Ionenstromes in Abhängigkeit von der Temperatur der Folie fest, andererseits eine kleine, mit dem Glühen ständig zunehmende Ausbeute der Ionisierung. Nach diesem ersten Glühen der Folie im Alkalidampf erhält man die Kurve II. Aber auch jetzt ist die Sättigung des Ionenstromes noch nicht gut.

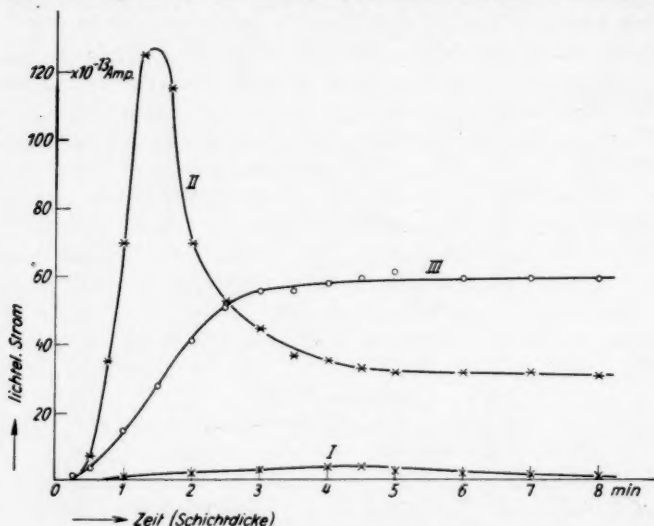


Abb. 5. Lichtelektrische Empfindlichkeit für 5779 in Abhängigkeit von der Schichtdicke bei fortschreitender Entgasung des Trägermetalls. $E_{||}$ und E_{\perp}

Atomstrahlstärke: $7,1 \cdot 10^{14}$ Atome je qcm und min

Nach weiterem, sehr starkem Glühen der Folie erhält man eine Kurve III. Jetzt ist für die hier benutzten Schichtdicken kein Höchstwert des lichtelektrischen Stroms mehr vorhanden. Nach weiterem, sehr oft wiederholtem und sehr starkem Glühen erhält man überhaupt keinen lichtelektrischen Effekt mehr für 5779, obwohl die Ausbeute der Ionisierung nun ihren sich nicht mehr ändernden Höchstwert erreicht hat und die Sättigung des positiven Ionenstromes sehr gut geworden ist.

Das gleiche Verhalten zeigt die lichtelektrische Empfindlichkeit für 25461. Verschieden sind nur die bestimmten Schichtdicken entsprechenden Werte der Empfindlichkeit. Für 6072 wurde überhaupt nur ein an der Grenze der Meßbarkeit liegender lichtelektrischer Effekt beobachtet bei jenem Zustand des Trägermetalls, bei

dem eine Kurve *II*¹ für 5779 erhalten wurde. Daraus ergibt sich, daß der niedrigste Wert der Austrittsarbeit von Kaliumschichten auf Platin, der in dieser Untersuchung beobachtet wurde, 2,0 Volt ist.

Diese Ergebnisse zeigen den auch von anderen Beobachtern wiederholt festgestellten Höchstwert des lichtelektrischen Effektes bei Schichtdicken, die einer einatomigen Schicht naheliegen. Aus dem Verlauf der Kurve *II* in Abb. 5 und dem gleichsinnigen Verlauf für 6072 und 5461 folgt weiter, daß die Grenzwellenlänge mit zunehmender *K*-Bedeckung über 5779 hinweg bis etwas über 6072 und dann wieder zurück bis zu einem zwischen diesen liegenden Wert wandert. Die für lang geglühtes Platin erhaltene Kurve *III* (Abb. 5) und das bei weiterem Glühen beobachtete völlige Verschwinden des lichtelektrischen Effektes für 6072 und 5779, ja selbst für 5461, zeigen, daß dieser Höchstwert der Grenzwellenlänge bzw. der lichtelektrischen Emission unter bestimmten Bedingungen für das Metallpaar Kalium-Platin verschwindet. Ist dieser Zustand erreicht, so liegt die durch die weiter oben gegebene Empfindlichkeitsgrenze dieser Versuchsanordnung bestimmte Grenzwellenlänge der Kaliumschichten auf Pt bei 5461. Sie schwankt bei Messungen, die in Zeitabschnitten von Stunden, Tagen oder Wochen aufeinanderfolgen, nur sehr wenig um diesen Wert, den sie auch für sichtbare, über 100 Atomlagen dicke und in gleicher Weise hergestellte Kaliumschichten annimmt. So folgt für die lichtelektrische Austrittsarbeit des reinen, hochentgasten, kompakten Kaliums der Wert von $2,26 \pm 0,02$ Volt.

Man kann die in den Kurven *I*, *II*, *III* der Abb. 5 dargestellten Übergangszustände auf verschiedene Weise zum Wiedererscheinen bringen. Hat man anfangs bei niedrigen Temperaturen des Atomstrahlofens¹⁾ (niedriger Atomstrahlstärke) gearbeitet und erhöht man diese nun, so erscheint bei den unmittelbar auf die Temperaturerhöhung des Atomstrahlofens folgenden Beobachtungen der in Kurve *II* dargestellte Verlauf der lichtelektrischen Empfindlichkeit in Abhängigkeit von der Schichtdicke wieder, verschwindet aber bei fortgesetztem Aufdampfen schnell. Dasselbe kann man dadurch erreichen, daß man den Druck im Apparat für eine ganz kurze Zeit etwas erhöht. So wurde in einem Versuch durch schwächeres Heizen der Diffusionspumpe der Druck im Apparat für einige Minuten auf 10^{-3} mm Hg erhöht, wobei aber flüssige Luft an Falle und Kohle lag. Sofort nach Wiederherstellung des Hoch-

1) Die Temperaturen des Atomstrahlofens lagen in diesen Versuchen zwischen 100 und 180° C.

vakuums gemachte Beobachtung ergibt für 5779¹⁾ und 5461 zunächst wieder eine Kurve II, nach weiterem Aufdampfen den Zustand III und schließlich Verschwinden der Emission für 5779 und Grenzwellenlänge nahe bei 5461. Dadurch wird klar gezeigt, welchen Einfluß der Einbau von Gasmolekülen auf das Zustandekommen und die Größe eines Höchstwertes des lichtelektrischen Elektronenaustritts hat. Daß auch eine Erhöhung der Temperatur des Atomstrahlens so wirkt, ist verständlich, da das Alkalimetall selbst bei den geringsten Restdrucken im Apparat adsorbierte Gasmoleküle ent-

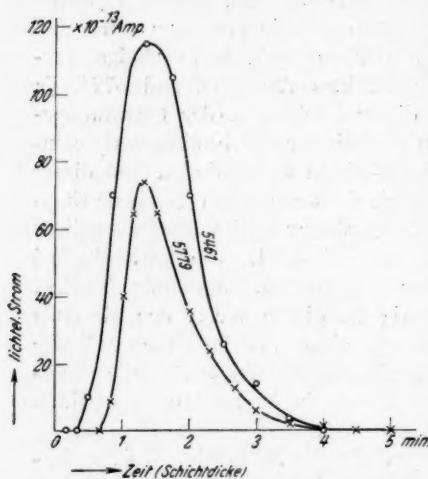


Abb. 6. Lichtelektrische Empfindlichkeit in Abhängigkeit von der Schichtdicke für 5779 und 5467¹⁾ bei stärkerem Gasgehalt der Schicht. $E \perp$. Atomstrahlstärke: $3,4 \cdot 10^{15}$ Atome je qcm und min

halten wird; ein Teil der im Ofen abgegebenen Gasmoleküle gelangt ebenfalls auf die Folie *F*, von der er leicht adsorbiert wird.

Wird der Druck im Apparat durch Abstellen der Hochvakuum pumpen für einige Minuten bis auf 0,5 mm Hg erhöht, wodurch stärkere Gasaufnahme und Oxydation des Kaliums erzielt wird, dann tritt die Erscheinung der steil über einen Höchstwert verlaufenden Kurven der lichtelektrischen Empfindlichkeit noch viel ausgeprägter auf (Abb. 6).

Die Frage, bei welcher Schichtdicke der Höchstwert der lichtelektrischen Empfindlichkeit auftritt, soll erst im Zusammenhang mit den

Ergebnissen für die Linien der beiden anderen Gruppen besprochen werden. Doch muß schon hier mitgeteilt werden, daß das Maximum in der Stromkurve z. B. für 5779 in den Übergangszuständen der Abb. 5 und in dem in Abb. 6 dargestellten Fall stärkerer Oxydation überhaupt nicht bei einer bestimmten Schichtdicke auftritt. Es wurden Werte von $8 \cdot 10^{14}$ bis $5 \cdot 10^{15}$ Kaliumatomen je Quadratcentimeter gefunden, um so höher, je stärker der Gasgehalt der Schicht.

1) Für 6072 wurde in diesem Falle keine lichtelektrische Emission erhalten.

B. Die der Grenzwellenlänge des Platins naheliegenden Linien 2655, 2540 und 2482 ÅE

Die Folie F wird bei geschlossener Klappe K durch starkes Glühen von Kalium gereinigt; bei der höchsten Meßempfindlichkeit tritt ein Ausschlag erst für die Linie 2655 ein. Aus der Größe des lichtelektrischen Effektes für die Linien 2655, 2540 und 2482 berechnet sich die Austrittsarbeit von 4,5 Volt (2750 ÅE). Es erwies sich als unmöglich, diese langwellige Grenze durch längeres, stärkstes Glühen nach kürzeren Wellenlängen zu verschieben. Von anderer Seite¹⁾ wird behauptet, daß die langwellige Grenze von Pt durch äußerstes Entgasen bis 1900 ÅE zurückgeht. Da auch die vorliegende Beobachtung im höchsten Vakuum gemacht und das Platin wiederholt sehr lang und bei höchsten Temperaturen geglüht wurde, kann angenommen werden, daß durch das ständige Glühen der Platinfolie im Kaliumdampf zum Zwecke der Messung der Atomstrahlstärke ein Einbau von Kaliumatomen in das Platingitter erfolgte, die vielleicht nur durch stärkstes Glühen in einem von Kaliumatomen freien Raume aus dem Platin entfernt werden können. Dies war aus technischen Gründen in diesem Versuchsapparat nicht zu erfüllen. Möglich ist auch, daß trotz des sehr geringen Dampfdruckes des Kaliums²⁾ sich sofort nach dem Abkühlen der eben

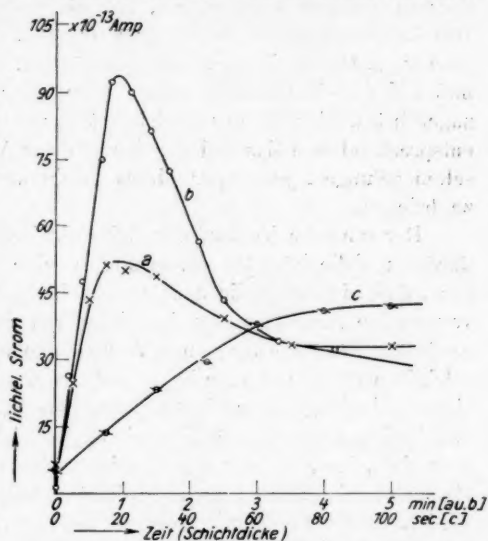


Abb. 7. Lichtelektrische Empfindlichkeit für 2655 in Abhängigkeit von der Schichtdicke $E \perp$.
 Kurve a: entgast, Atomstrahlstärke $2,0 \cdot 10^{14}$ je qcm und min; Kurve b: mit eingebauten Gasmolekülen. Atomstrahlstärke $6,2 \cdot 10^{14}$ je qcm und min; Kurve c: entgast, Atomstrahlstärke $1,2 \cdot 10^{14}$ Atome je qcm und min

1) L. A. du Bridge, Phys. Rev. 29. S. 451. 1927.

2) Bestimmt durch die Temperatur des in T eingefüllten CO_2 -Schnees.

geglühten Folie einige Atome auf dem Platin niederschlugen und die Austrittsarbeit bis auf den oben genannten Wert verringerten.

Die für die Linie 2655 erhaltenen Ergebnisse zeigt Abb. 7. Nach sehr langem Glühen und weitestgehender Entgasung (Abb. 7, Kurve a) steigt die lichtelektrische Empfindlichkeit schon bei geringen, unterhalb einer einatomigen *K*-Schicht liegenden Bedeckungen des Platins steil an, um nach einem Höchstwert einen tieferen Endwert anzunehmen, der bis zu Schichten von mehr als 100 Atomlagen keine Änderung mehr zeigt. Bei weniger guter Entgasung, z. B. in den Übergangszuständen, die den Kurven *I*, *II* und *III* der Abb. 5 entsprechen oder wenn absichtlich etwas Gas zugeführt wird, wird der Höchstwert ausgeprägter (Kurve *b*, Abb. 7), entsprechend dem Zustand der Kurven der Abb. 6. Es ist nur sehr selten gelungen, jede Spur dieses Höchstwertes zum Verschwinden zu bringen.

Der einfache Verlauf der lichtelektrischen Empfindlichkeit für 2655 im Falle höchster Entgasung ist eine Bestätigung der Erwartung, daß die durch die zunehmende Bedeckung mit Kaliumatomen verursachte Änderung der Austrittsarbeit des Platins am reinsten erscheint, wenn die erregende Wellenlänge einerseits nicht mehr im selektiven Bereich des Kaliums, andererseits aber schon jenseits der Grenzwellenlänge des Platins liegt. So ist zum Unterschied von den Linien der ersten Gruppe die Schichtdicke, bei der der Höchstwert liegt, bzw. bei der das Umbiegen der Kurven zum konstanten Endwert erfolgt, eine ganz bestimmte und man erhält sie immer wieder, sobald der durch Kurve *a* der Abb. 7 gekennzeichnete Zustand weitgehender Entgasung erreicht ist. In der Tab. 1 sind diese Schichtdicken nach mehreren Meßreihen durch die Zahl der auf einem Quadratcentimeter Platinoberfläche sitzenden Kaliumatome in der zweiten senkrechten Reihe eingetragen. Die erste gibt die Stärke des Atomstrahles. Der letzte Wert wurde eingeklammert, weil bei höheren Atomstrahlstärken der Anstieg des lichtelektrischen Stroms so schnell erfolgt, daß der Zeitpunkt des Höchstwertes, bzw. des Umbiegens der Kurven, nicht mehr bestimmt werden kann.

Der Mittelwert $2,9 \cdot 10^{14}$ Atome je Quadratcentimeter entspricht rund 0,7 einer einatomigen Schicht. Dieser Wert stimmt vollkommen mit jenem überein, der in der vorhergehenden Arbeit¹⁾ aus dem für die Gesamtstrahlung einer Hg-Lampe beobachteten Gang der licht-

1) H. Mayer, a. o. O.

Tabelle 1
Auslösende Strahlung: 2655 ÅE

Stärke des Atomstrahles Atome je qcm u. min	Bedeckung b. Höchstwert ¹⁾ Atome je qcm	Bemerkungen
1,1 · 10 ¹⁴	3,3 · 10 ¹⁴	{ Strahlung nicht polar.; { Mittelwert von 6 Messungen polar.; $E \perp$ { Mittelwert von 7 Messungen polar.; $E \perp$ polar.; $E \perp$ polar.; $E \perp$ nicht polar. polar.; $E \parallel$ nicht polar. polar.; $E \perp$
1,2	3,0	
2,0	2,0	
4,0	3,0	
5,0	2,5	
5,2	2,6	
5,4	2,5	
5,5	4,1	
(11,5)	(6,6)	

Mittelwert: $2,9 \cdot 10^{14}$

elektrischen Empfindlichkeit in Abhängigkeit von der Schichtdicke für hochentgastes Platin und Kalium erhalten wurde²⁾.

In Abb. 7, Kurve *c* ist der Gang der lichtelektrischen Empfindlichkeit in Abhängigkeit von der Schichtdicke für 2655 mit vergrößerter Zeitskala bei kleiner Atomstrahlstärke eingetragen³⁾. Nimmt man an, daß durch diesen Gang die Veränderung der Austrittsarbeit wiedergegeben wird, so kann man über diese in Abhängigkeit von der Schichtdicke folgendes aussagen: Bis zu einer Bedeckung von nahezu 0,3 einer einatomigen Schicht fällt die Aus-

1) Zu diesen und allen folgenden Werten, die eine bestimmte Bedeckung von 1 qcm Platinoberfläche angeben, muß folgendes bemerkt werden: Die Berechnung der Gesamtzahl der auf eine bekannte Fläche je Sekunde auffallenden und, wenn diese gekühlt ist, auch haften bleibenden Kaliumatome erfolgt auf Grund der Ionenstrommessung mit Hilfe des Ionisierungsgrades. Sowohl bei der experimentellen Bestimmung desselben wie auch in der vorliegenden Arbeit wurde die aus den Abmessungen des Platindrahtes bzw. der Platinfolie berechnete *scheinbare*, nicht aber die wegen der Rauigkeit größere *wahre* Oberfläche benützt, weil letztere unbekannt ist. Trotzdem zeigt eine einfache Überlegung an Hand der in der vorhergehenden und in dieser Arbeit gegebenen Formeln, daß alle hier mitgeteilten Werte der Bedeckung für je 1 qcm *wahrer* Platinoberfläche gelten, da die zur Berechnung der Bedeckung benützte Endformel vom Vergrößerungsfaktor unabhängig wird, sofern dieser sowohl für die bei der experimentellen Bestimmung des Ionisierungsgrades als auch für die in dieser Arbeit verwendete Platinoberfläche derselbe ist. Dies kann trotz der verschiedenen Form (Draht und Band) angenommen werden.

2) Die dort gegebenen Atomstrahlstärken bzw. Werte der Bedeckung müssen zur Berechnung der wirklichen Schichtdicken noch mit dem damals noch unbekannten Ionisierungsgrad von Kaliumatomen an glühenden Platinflächen multipliziert werden.

3) Kühlung von *F* mit flüssiger Luft.

trittsarbeit fast linear mit der Zahl der aufgedampften Kaliumatome. Dann wird die Abnahme immer langsamer, die gegenseitige Beeinflussung der Kaliumatome immer größer. Bei einer Bedeckung von 0,7 geht sie über einen mehr oder weniger hervortretenden Tiefwert langsam in den dem kompakten Kalium eigenen Wert über, der bei etwa 10 Atomlagen erreicht wird.

Sind Gasmoleküle am Aufbau der Schicht mitbeteiligt, so ist nicht nur der Höchstwert viel ausgeprägter, sondern auch die zu diesem gehörige Schichtdicke größer, in Übereinstimmung mit den Ergebnissen für die Linien der ersten Gruppe.

Die lichtelektrische Empfindlichkeit für die beiden Linien 2540 und 2482 zeigt das gleiche Verhalten wie für 2655.

C. Die im selektiven Bereich liegenden Linien 4358, 4047, 3655, 3341, 3132

Die lichtelektrische Empfindlichkeit für diese Linien in Abhängigkeit von der Schichtdicke zeigt einen von den Linien der

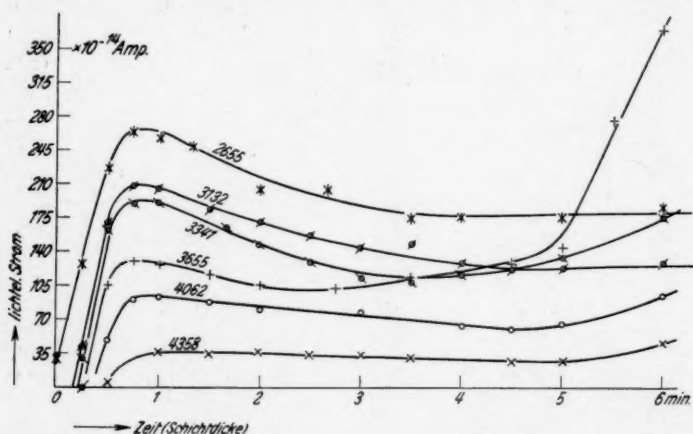


Abb. 8. Lichtelektrische Empfindlichkeit für die Linien des selektiven Bereiches in Abhängigkeit von der Schichtdicke.

Atomstrahlstärke: $2,0 \cdot 10^{14}$ je qcm und min. $E \perp$

ersten und der zweiten Gruppe verschiedenen Gang. Den Gesamtverlauf kann man in zwei Teile teilen, deren erster bis zu jener Schichtdicke reicht, bei der die spektrale Selektivität beginnt.

In Abb. 8 ist das Ergebnis einer mit unveränderter Atomstrahlstärke gemachten Meßreihe bis kurz nach Beginn der spektralen

Selektivität eingetragen. Zum Vergleich ist auch der Verlauf für 2655 eingezeichnet¹⁾.

Man ersieht aus Abb. 8 dreierlei: 1. Der lichtelektrische Effekt dünnster Alkalischichten ist normal²⁾. 2. Selbst im höchsten Vakuum und bei weitestgehender Entgasung von Träger- und Alkali-metall tritt ein mit der Schichtdicke zunehmender spektral-selektiver Effekt auf. 3. Die Schichtdicke, bei der dieser Effekt beginnt, liegt zwischen zwei und drei Atomlagen.

Im ersten Teil ihres Gesamtverlaufes zeigen die Empfindlichkeitskurven für die Linien des selektiven Bereiches den gleichen Verlauf wie die außerhalb dieses Bereiches liegende Linie 2655. Der bei dieser Linie vorhandene Höchstwert bei einer Bedeckung von 0,7 einer einatomigen Schicht tritt, wenn auch immer schwächer hervortretend, auch bei den Linien des selektiven Bereiches bei der gleichen Dicke auf: In Tab. 2 sind die Schichtdicken für verschiedene Versuchsreihen eingetragen.

Aus Abb. 8 ersieht man auch, daß die Emission bei um so dickeren Schichten beginnt, je langwelliger die Strahlung ist.

Tabelle 2

Wellenlänge	Stärke des Atomstrahls Atome je qcm u. min	Bedeckung beim ersten Höchstwert Atome je qcm	Anmerkungen
3132	$2,0 \cdot 10^{14}$	$2,0 \cdot 10^{14}$	$E \perp$
3132	4,0	2,5	"
3132	5,0	2,5	"
3132	5,2	3,5	nicht polar.
3132	5,6	2,8	$E \perp$ (4 Messung.)
3132	6,8	4,0	$E \perp$
3132	10,5	2,6	"
3341	2,0	2,0	"
3341	4,0	2,0	"
3655	2,0	2,0	"
3655	4,0	2,7	"
3655	12,5	3,1	"
4062	5,0	2,5	"
4062	12,5	3,1	"
4358	4,6	2,5	"
4358	5,4	5,4	"

Mittelwert: $2,8 \cdot 10^{14}$

1) Der Ausschlag ist hier für alle Linien im Sinne des über die Intensitätsmessung Gesagten auf gleiche relative Intensität ($10 \cdot 10^{-9}$ cal/sec) der Linien bezogen. Es soll aber nochmals darauf hingewiesen werden, daß die Intensitäten der einzelnen Linien nicht durch Messung bestimmt wurden und daher die Höhe der Ordinaten, die in diesem Abschnitt über die spektrale Selektivität gegeben werden, nur qualitativ richtig ist.

2) Vgl. R. Suhrmann, Ergebn. d. ex. Naturw. 13. S. 173. 1934.

Der zweite Teil des Verlaufes der lichtelektrischen Empfindlichkeit im selektiven Bereich ist aus Abb. 9 besser zu erkennen, weil mit höherer Atomstrahlstärke, d. h. schnellerer Diczunahme, gearbeitet wurde.

Werden die zu bestimmten Schichtdicken gehörenden Empfindlichkeiten in Abhängigkeit von der Wellenlänge eingetragen, so kann

man den Aufbau des selektiven Höchstwertes sehr schön verfolgen, wie aus Abb. 10 zu erkennen ist.

Die Lage des Höchstwertes wird durch drei Faktoren weitgehend beeinflusst: 1. durch die Schichtdicke, 2. durch die Schnelligkeit der Diczunahme und 3. durch den Einbau von Gas-molekülen. Der in Abb. 10 dargestellte Aufbau des selektiven Höchstwertes wurde bei ziemlich rascher Diczunahme (vier Atomlagen je Minute) erhalten. Es wurde beobachtet, daß in diesen Fällen der selektive Höchstwert sich bei etwa 4047 ÅE ausbildet. Wird mit geringerer Atomstrahl-

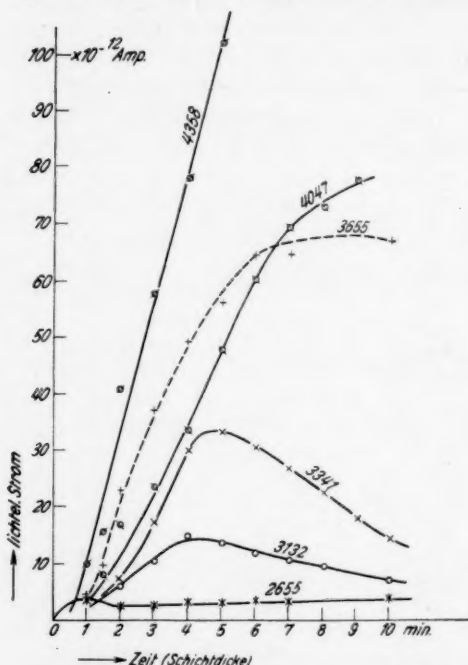


Abb. 9. Lichtelektrische Empfindlichkeit für die Linien des selektiven Bereiches in Abhängigkeit von der Schichtdicke. Atomstrahlstärke: $1,25 \cdot 10^{16}$ je qcm und min. $E \perp$

stärke gearbeitet (Abb. 8), so baut sich der Höchstwert bei etwa 3655 ÅE auf; bei geeigneter Atomstrahlstärke kann man oft auch beobachten, wie dieser Höchstwert, aus dem Ultraviolett kommend, sich mit zunehmender Schichtdicke immer mehr gegen längere Wellen verschiebt. Diese Beobachtungen stehen im besten Einklang mit qualitativen Ergebnissen anderer Beobachter¹⁾.

1) R. Suhrmann, a. a. O.

Der Verlauf der Empfindlichkeitskurven für die Linien des selektiven Bereiches wird durch den Einbau von Gasmolekülen in die Kaliumschicht in ähnlicher Weise verändert, wie es für die Linien der beiden anderen Gruppen gezeigt wurde. Wie Abb. 11 zeigt, tritt auch hier für alle Linien ein stark ausgeprägter Höchstwert auf; er liegt bei um so größerer Schichtdicke, je langwelliger die auslösende Strahlung ist. Zum Vergleich sind wieder die Kurven für die Linien der beiden anderen Gruppen eingetragen. Der selektive Höchstwert liegt in diesem Falle bei etwa 3000 ÅE, wie Abb. 12 zeigt. Ist die Anzahl der in die Schicht eingebauten Gasmoleküle kleiner, so kann man, wie Abb. 13 zeigt, Höchstwerte sowohl bei 3000 ÅE als auch bei 4000 ÅE beobachten und auch den Übergang von der einen in die andere Lage über eine Reihe von Zwischenzuständen schön verfolgen.

Die Grenze des lichtelektrischen Effektes von Platin lag bei 2750 ÅE, sobald es durch Glühen von den darauf sitzenden Kaliumatomen befreit war. Es wurden nun eine Reihe von Beobachtungen gemacht, um jene Bedeckung Z bei höchst entgasteten Schichten zu ermitteln, die nötig ist, um die langwellige Grenze von 2750 ÅE bis 4358 ÅE bei verschiedener Atomstrahlstärke zu verschieben, was einer Verminderung der Austrittsarbeit um 1,6 Volt entspricht.

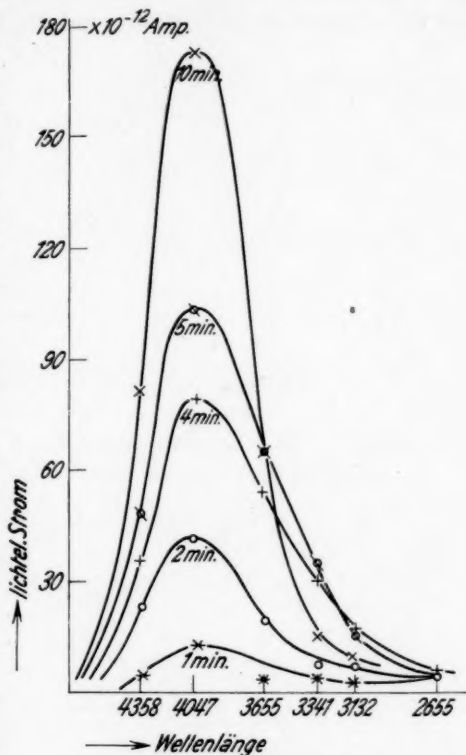


Abb. 10. Aufbau des selektiven Höchstwertes bei schneller Dickenzunahme der Schicht. Atomstrahlstärke: $1,25 \cdot 10^{15}$ je qcm und min

Sie ergibt sich unabhängig von der Geschwindigkeit der Schichtbildung (Tab. 3).

Denkt man sich die Verminderung der Austrittsarbeit durch das Potential einer Doppelschicht verursacht, die dadurch entsteht, daß Kaliumatome als positive Ionen auf der Platinoberfläche sitzen¹⁾.

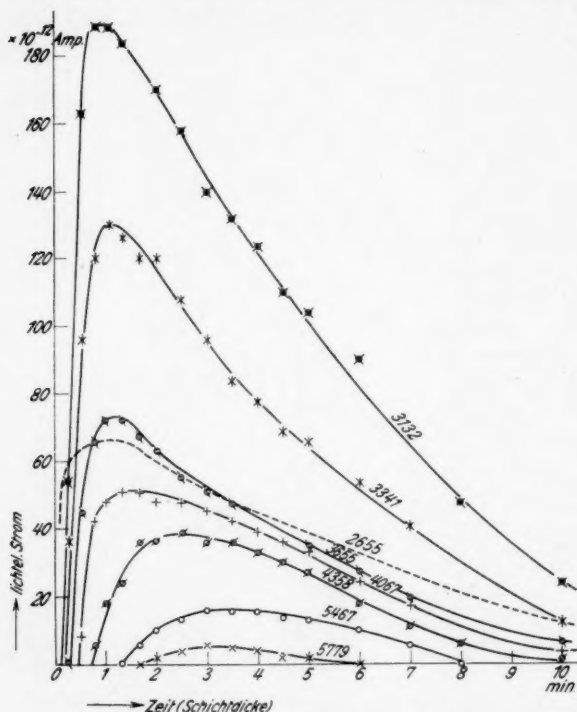


Abb. 11. Lichtelektrische Empfindlichkeit in Abhängigkeit von der Schichtdicke bei starkem Gasgehalt der Schicht. Atomstrahlstärke $1,7 \cdot 10^{10}$ je qcm und min

so kann man unter bestimmten vereinfachenden Annahmen berechnen¹⁾, wie viele solcher „ionisierter“ Kaliumatome nötig sind, um die beobachtete Verschiebung der Austrittsarbeit von 1,6 Volt zu verursachen. Das Potential einer Doppelschicht ist

$$\Delta\Phi = -300 \cdot 4\pi \cdot N_p \cdot e \cdot d \text{ Volt.}$$

(N_p die Zahl der ionisierten Atome, e die Elementarladung, d die Entfernung der positiven und negativen Ladung der Doppelschicht.)

1) J. A. Becker, Bell Teleph. Labor. 1929.

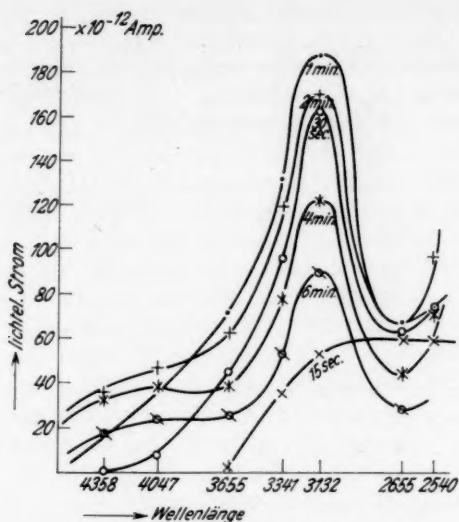


Abb. 12. Auf- und Abbau des selektiven Höchstwertes bei starkem Gasgehalt der Schicht. Atomstrahlstärke $1,7 \cdot 10^{16}$ je qcm und min

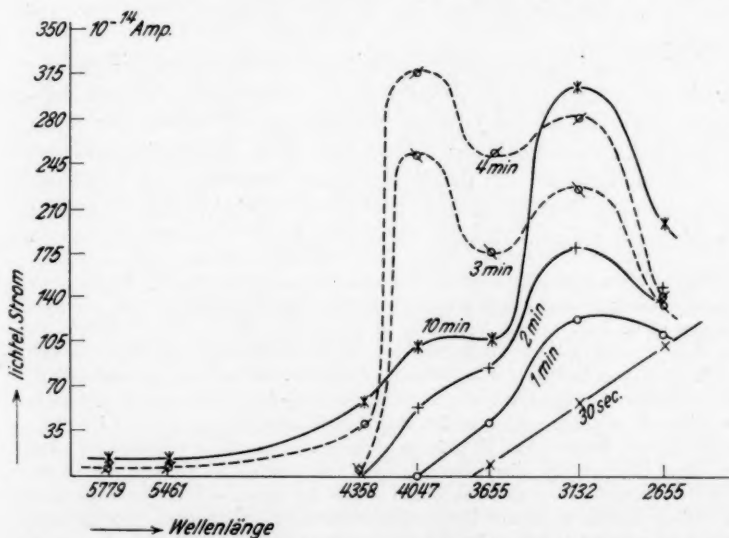


Abb. 13. Auf- und Abbau der selektiven Höchstwerte bei geringem Gasgehalt der Schicht. Atomstrahlstärke $8,0 \cdot 10^{14}$ je qcm und min

Tabelle 3
Auslösende Strahlung: 4358 ÅE

Atomstrahlstärke (je qcm und min)	Zeit ¹⁾ (Beginn der Emission) in sec	Schichtdicke (Zahl Z) je qcm
1,2 · 10 ¹⁴	75	1,5 · 10 ¹⁴
1,2	70	1,4
1,2	77	1,5
2,0	42	1,4
2,0	45	1,5
4,1	25	1,7
4,2	27	1,9
6,1	12	1,2
9,5	13,5	2,1

Mittelwert: 1,6 · 10¹⁴

Nimmt man für d versuchsweise den Ionenhalbmesser des Kaliums, so berechnet man für $\Delta\Phi = 1,6$ Volt ein $N_p = 0,7 \cdot 10^{14}$ je Quadratcentimeter. Dies ist nur etwa 50% der durch die Versuche bestimmten Zahl von $1,6 \cdot 10^{14}$. Diese Bedeckung von $1,6 \cdot 10^{14}$ liegt schon in dem Gebiete, in dem wegen der gegenseitigen Beeinflussung der Kaliumionen die Potentialdifferenz der Doppelschicht nicht mehr der Zahl der aufgedampften Kaliumatome proportional ist, so daß also die durch die Versuche bestimmte Zahl höher sein muß als die auf Grund der einfachen Rechnung gefundene.

Bei stärkerem Gasgehalt beträgt die für die gleiche Änderung der Austrittsarbeit nötige Bedeckung ein Vielfaches²⁾ des oben mitgeteilten Wertes, wie es ja auch für die dem Höchstwert des lichtelektrischen Effektes entsprechende Schichtdicke nachgewiesen wurde.

Im Zusammenhang damit soll auch das Ergebnis ähnlicher Beobachtungen für die anderen Linien des selektiven Bereiches und die Linien der ersten Gruppe erwähnt werden. Jedoch muß noch-

1) Diese wurde so ermittelt, daß man die unmittelbar nach Beginn der Emission beobachteten lichtelektrischen Ströme in Abhängigkeit von der Zeit einträgt (z. B. Abb. 4) und durch die so erhaltenen Punkte eine Gerade legt. Ihr Schnittpunkt mit der Zeitachse ergibt den Zeitpunkt des Beginnes der durch 4358 verursachten lichtelektrischen Emission. Die Höchstepfindlichkeit der Meßapparatur betrug: 1 mm Ausschlag = $3,5 \cdot 10^{-14}$ Amp., die Intensität der Linie 4358 ist ungefähr gleich dem bei Simon-Suhrmann (Lichtelektrische Zellen, Berlin 1932, S. 204) gegebenen Werte. Da die Emissionallinien bei ihrem Übergang in die Zeitachse etwas gekrümmt sind, so sind die so ermittelten Schichtdicken wahrscheinlich etwas zu hoch, der Unterschied aber ist gering, sofern man zur Bestimmung nur unmittelbar nach Beginn der Emission gemessene Werte der lichtelektrischen Ströme verwendet.

2) Sie betrug z. B. in dem der Abb. 12 entsprechenden Zustand stärkeren Gasgehaltes $9,2 \cdot 10^{14}$ je Quadratcentimeter.

mals darauf hingewiesen werden, daß eine lichtelektrische Emission für letztere nur unter ganz bestimmten Versuchsbedingungen zu beobachten war und im Zustand höchster Gasfreiheit gar nicht mehr auftrat. Es handelt sich also hier im Gegensatz zu den für 4358 mitgeteilten Ergebnissen um solche, die nur dann wiederholbar waren, wenn die Platinoberfläche sich in dem durch die Kurven *II* und *III* der Abb. 5 gekennzeichneten Zustand befanden. Dennoch sind die Ergebnisse, die in Tab. 4 eingetragen sind, bemerkenswert.

Diese Tabelle gibt in der zweiten senkrechten Reihe den Unterschied $\Delta \Phi$ der Austrittsarbeiten, der einerseits durch die Grenzwellenlänge 2750 ÅE des vom Kalium befreiten Platins bestimmt ist und andererseits durch die in der ersten Reihe eingetragene Wellenlänge. In der dritten Reihe sind die experimentell bestimmten Bedeckungen gegeben, bei denen der Beginn der lichtelektrischen Emission für die betreffende Linie beobachtet wurde. Die vierte Reihe gibt die Zahl N_a der Kaliumatome, die aus der Beziehung

$$\Delta \Phi = -300 \cdot 4\pi \cdot N_a \cdot e \cdot d$$

wie oben berechnet wurde. Mit Hilfe der Beziehung

$$\Delta \Phi = -300 \cdot 2\pi N_a M,$$

wo M das Dipolmoment der die Doppelschicht aufbauenden elektrischen Dipole ist, erhält man die in der fünften Reihe eingetragenen Werte. Zwischen dem Moment M und der Entfernung $2d$ der entgegengesetzten Ladungen der Dipole besteht die Beziehung $M = 2 \cdot e \cdot d$, wo e die Elementarladung ist. Die mit Hilfe dieser Beziehung berechneten Werte von d sind in der letzten Reihe eingetragen. Man kann d , solange noch keine stärkere gegenseitige Beeinflussung der Dipole vorliegt, als die Entfernung der positiven Schicht von der Metalloberfläche ansehen.

Zu dieser Tabelle ist folgendes zu bemerken: den berechneten Werten der vierten Reihe liegt versuchsweise die Annahme zugrunde, daß die Entfernung der positiven Belegung von der Metalloberfläche gleich dem Halbmesser des Kaliumions (1,3 ÅE) ist; die beobachteten Werte der Reihe 3 und der Reihen 5 und 6 enthalten den Wert des Ionisierungsgrades von Kaliumatomen an glühenden Platinflächen, welcher die Dampfdrucke des Kaliums enthält¹⁾. Diese aber, von verschiedenen Beobachtern mit verschiedenen Methoden gemessen, zeigen Unterschiede von nahezu 100%!

Mit Rücksicht hierauf ist die Übereinstimmung der beobachteten und berechneten Werte der Bedeckung, solange noch keine stärkere gegenseitige Beeinflussung der adsorbierten Kaliumatome vorhanden

1) H. Mayer, Ztschr. f. Phys. (im Druck).

ist, eine sehr gute. Die mit zunehmender Bedeckung zunehmende Wechselwirkung der Kaliumatome tritt auch in Tab. 4 durch den zunehmenden Unterschied zwischen beobachteten und berechneten Werten (bzw. als Abnahme von M) deutlich hervor. Die bei Bedeckungen von 0,1—0,3 berechneten Werte für das Dipolmoment und die Entfernung d stimmen mit Werten von Langmuir¹⁾ für Cäsiumatome auf Wolfram gut überein. Ferner sieht man, daß der Beginn der lichtelektrischen Emission für die jenseits der Grenzwellenlänge des Kaliums (~ 5461) liegenden Linien 5779 und 6072 bei viel höheren Schichtdicken liegt. Der Beginn der lichtelektrischen Emission für die Linien 5779 und 6072, fällt also nicht mit dem Tiefwert der Austrittsarbeit zusammen.

Tabelle 4

Wellenlänge	$\Delta \Phi$ in Volt	Bedeckung bei Beginn der Emission (je qcm)		Dipolmoment M	d in cm
		beobachtet	berechnet		
3132	0,55	$3,3 \cdot 10^{13}$	$2,4 \cdot 10^{13}$	$8,9 \cdot 10^{-18}$	$9,3 \cdot 10^{-8}$
3341	0,80	$4,1 \cdot 10^{13}$	$3,4 \cdot 10^{13}$	$10,3 \cdot 10^{-18}$	$10,7 \cdot 10^{-8}$
4062	1,45	$8,0 \cdot 10^{13}$	$6,2 \cdot 10^{13}$	$9,7 \cdot 10^{-18}$	$10,1 \cdot 10^{-8}$
4358	1,65	$16 \cdot 10^{13}$	$7,1 \cdot 10^{13}$	$5,5 \cdot 10^{-18}$	—
5467	2,25	$27 \cdot 10^{13}$	$9,7 \cdot 10^{13}$	$4,4 \cdot 10^{-18}$	—
5779	2,35	$40 \cdot 10^{13}$	$10 \cdot 10^{13}$	$3,1 \cdot 10^{-18}$	—
6072	2,45	$49 \cdot 10^{13}$	$10,5 \cdot 10^{13}$	$2,6 \cdot 10^{-18}$	—
Bedeckung im Augenblick des Höchstwertes (beobachtet)					
2655		$2,8 \cdot 10^{14}$			

2. Veränderungen in der lichtelektrischen Empfindlichkeit bei unveränderter Schichtdicke des Alkalimetalls

Die bisher vorliegenden Arbeiten über die Eigenschaften dünnster Alkalischichten²⁾ enthalten auch eine Reihe von Beobachtungen über Änderung dieser Eigenschaften mit der Zeit. Es konnte, zum Teil im Einklang mit diesen, nachgewiesen werden, daß zweierlei Ursachen vorliegen, die im Versuch leicht zu trennen sind: 1. Adsorption von Fremdmolekülen, hauptsächlich Gasmolekülen im nicht genügend hohen Vakuum; die dadurch verursachten Veränderungen treten bei jeder Schichtdicke auf. 2. Durch Umlagerung bzw. Wandern³⁾ der adsorbierten Alkaliatome; die dadurch bewirkten

1) I. Langmuir, Phys. Rev. **43**, S. 224. 1933.

2) Schrifttum hierzu bei R. Suhrmann, a. a. O.

3) Quantitative Untersuchungen des Wanderns adsorbierter Fremdatome mit dieser Methode sind in Angriff genommen.

Veränderungen können besonders gut beobachtet werden, solange die Bedeckung noch unterhalb einer ein- bis zweiatomigen Schicht ist.

Wie das Ergebnis des folgenden Versuches zeigt, können Veränderungen erster Art durch höchstes Vakuum, Veränderungen zweiter Art durch genügend tiefe Temperatur des Trägermetalles und der adsorbierten Alkaliatome verhindert werden.

Mit geringer Atomstrahlstärke wird auf die Folie *F*, durch flüssige Luft im Kühlrohr *T* gekühlt, Kalium aufgedampft und die lichtelektrische Emission für eine bestimmte Linie in Abhängigkeit von der Schichtdicke verfolgt. Bei einer Bedeckung von einem Viertel

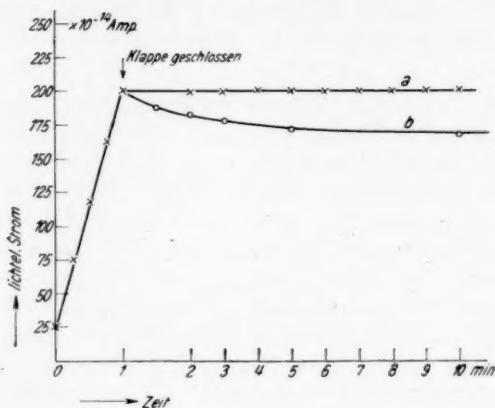


Abb. 14

einer einatomigen Schicht wurde das Aufdampfen durch Schließen der Klappe *K* unterbrochen, der lichtelektrische Strom aber weiter beobachtet. Das Ergebnis zeigt die Kurve (a) der Abb. 14. Es trat — der Versuch kann beliebig oft wiederholt werden — nicht die geringste Änderung in der lichtelektrischen Empfindlichkeit auf. Wird die Folie aber nur durch CO_2 -Schnee gekühlt, so nimmt der Strom ab [Kurve (b)]. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß jetzt die Temperatur der Folie nicht mehr genügend tief ist, um die Beweglichkeit der adsorbierten Kaliumatome so weit zu vermindern, daß keine Umlagerung in Gleichgewichtslagen mehr eintreten kann.

Wird die Klappe *K* erst geschlossen, wenn eine zwei- oder mehratomige Schicht aufgedampft ist, dann erfolgt im höchsten Vakuum weder bei Kühlung mit flüssiger Luft noch mit CO_2 eine Änderung der lichtelektrischen Empfindlichkeit, was für λ 2655, 3132 und 4358 geprüft wurde.

Umlagerungen der Kaliumatome in dickeren Schichten machen sich im selektiven Bereich durch Änderung und Verlagerung des Höchstwertes bemerkbar.

3. Stromspannungskurven

Die Platinfolie F war allseitig von den als Anode dienenden Metallzylindern C_1 und C_2 umgeben. Obwohl dies wegen der flächenförmigen Kathode und den nicht kugelförmigen Anoden nicht als eine für die Aufnahme von Stromspannungskurven einwandfreie Anordnung angesehen werden kann, wurde dennoch der Versuch gemacht, durch Aufnahme solcher Kurven Schlüsse über Geschwindigkeitsverteilung, Herkunftsort der Elektronen und Austrittsarbeit zu ermöglichen.

Um diese Kurven für bekannte Schichtdicken im Augenblicke ihres Entstehens aufzunehmen, wurde in folgender Weise vorgegangen: Die Stärke des Atomstrahles wurde unverändert gehalten, was bei mehrfach wiederholtem Aufdampfen des Alkalimetalls auf das vorher durch Glühen gereinigte Platin immer die gleiche Diczunahme der Schicht je Zeiteinheit gewährleistet. Gemessen wurde so, daß an die Anode zuerst eine schon im Sättigungsgebiet liegende Spannung gelegt wurde, während monochromatische Strahlung auf F fiel. Nun wird die Klappe K geöffnet und der lichtelektrische Strom in Abhängigkeit von der Zeit, d. h. der Schichtdicke, aufgenommen. Nach Erreichung einer bestimmten Schichtdicke wird K geschlossen, die Kaliumschicht durch Glühen von F entfernt, eine kleinere Spannung an die Anode gelegt und die Messung in derselben Weise wiederholt. So erhält man Kurven der Abb. 15. Alle zu einer Abszisse gehörenden Kurvenpunkte geben dann die einer bestimmten Schichtdicke entsprechende lichtelektrische Stromspannungskurve, und zwar für jede Schichtdicke im Augenblick ihres Entstehens (Abb. 16). In der mehrere Stunden langen MeBreihe müssen Atomstrahlstärke und Stärke der Hg-Strahlung unverändert bleiben.

Diese Stromspannungskurven gestatten eine Reihe bemerkenswerter Schlüsse. Durch das Aufdampfen von Kalium auf die Platin-kathode F ändert sich nicht nur die Austrittsarbeit um $\Delta\Phi$, sondern auch das Kontaktpotential der Kathode gegen die Anode um $\Delta\Psi$. Werden die Stromspannungskurven ohne Rücksicht auf diese Änderung, d. h. einfach in ihrer Abhängigkeit von der am Spannungsmesser abgelesenen Spannung eingetragen, so müssen sie, wenn Austrittsarbeit $\Delta\Phi$ und Kontaktpotential $\Delta\Psi$ gleich große Änderung, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, erfahren, in denselben Punkt

der Spannungsachse einmünden. Schreibt man nämlich die Einsteinsche Gleichung

$$h\nu = e \cdot V_m + e \cdot \Psi,$$

wo h die Plancksche Konstante, ν die Schwingungszahl der auslösenden Strahlung bedeuten, so ist V_m die Spannung, die gerade genügt, um alle lichtelektrisch ausgelösten Elektronen zurückzutreiben,

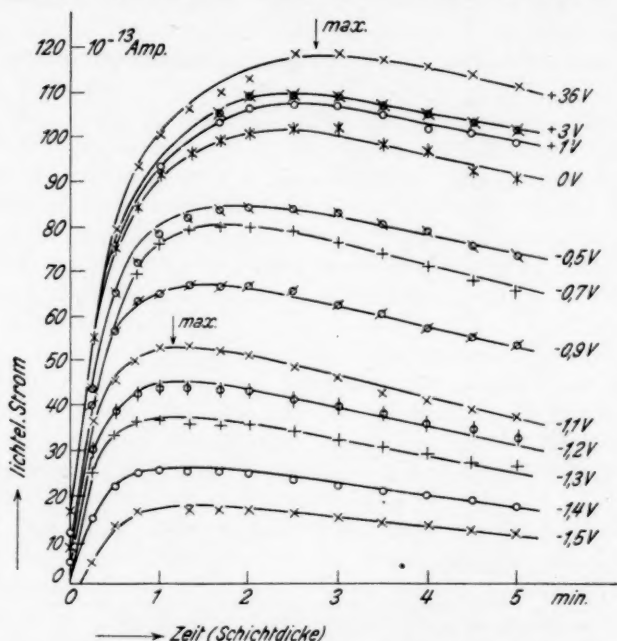


Abb. 15. Lichtelektrische Ströme für 2655 in Abhängigkeit von der Schichtdicke und der Spannung. Unpolarisiert. Atomstrahlstärke: $1,2 \cdot 10^{14}$ Atome je qcm und min

für die also der lichtelektrische Strom gerade verschwindet; Ψ ist die Austrittsarbeit und e die Elementarladung. Diese zwischen Anode und Kathode liegende Spannung V_m ist gleich der vom Spannungsmesser abgelesenen, wenn beide aus gleichem Material sind¹⁾. Sind Anode und Kathode aber aus verschiedenem Material, so daß die Austrittsarbeiten beider verschieden sind, dann ist

$$V_m = V'_m - V_{ae},$$

1) Vgl. auch H. Mayer, Bull. Fac. Stiințe, Cernăuți 10. S. 217. 1936.

wo V'_m jetzt die vom Spannungsmesser abgelesene Spannung und V_{ac} die Kontaktpotentialdifferenz zwischen Anode und Kathode ist. Setzt man dies in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$h\nu = e \cdot V'_m - e \cdot \psi - e \cdot V_{ac}$$

und

$$V'_m = \frac{h\nu}{e} - \psi - V_{ac}.$$

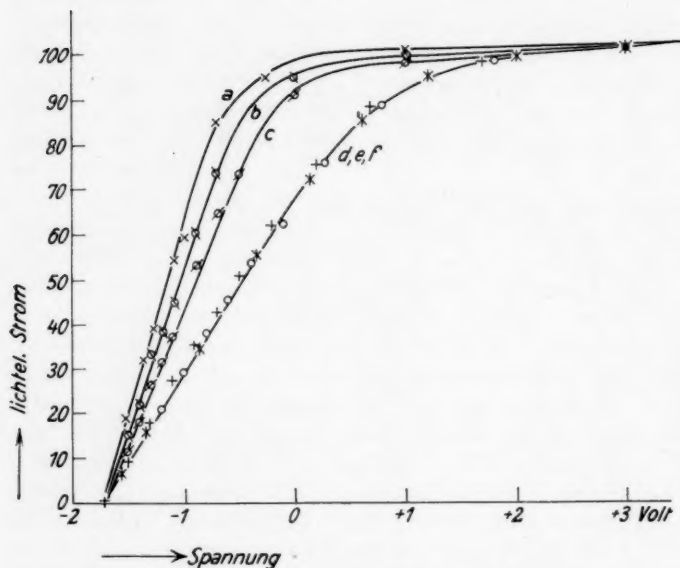


Abb. 16. Stromspannungskurven der lichtelektrischen Ströme (auslösende Strahlung 2655) für bestimmte Schichtdicke¹⁾.

Kurve a: Bedeckung Null (reines Platin)

„ b: „ $3 \cdot 10^{14}$ Atome je qcm

„ c: „ $6 \cdot 10^{14}$ „ „ „

„ d: „ $6 \cdot 10^{15}$ „ „ „

„ e: „ $\left\{ \begin{array}{l} \text{größer als } 10^{17} \text{ Atome je qcm,} \\ \text{sichtbare Schichten} \end{array} \right.$

„ f: „ $\left\{ \begin{array}{l} \text{größer als } 10^{17} \text{ Atome je qcm,} \\ \text{sichtbare Schichten} \end{array} \right.$

Während des Aufdampfens ändert sich V_{ac} ständig. Bezeichnet man diese Änderung mit $\Delta\Phi$ und setzt man

$$\Delta\Phi = -(\psi_a - \psi_e) = -\Delta\psi,$$

so erhält man

$$V'_m = \frac{h\nu}{e} - \psi_a.$$

1) Alle Ausschläge zurückgeführt auf gleichen Wert bei +3 Volt Spannung.

Die Spannung V'_m also, die gerade genügt, alle durch die Strahlung ν ausgelösten Photoelektronen wieder zur Kathode zurückzutreiben und die unmittelbar vom Spannungsmesser abgelesen wird, hängt nur von der Austrittsarbeit der Anode, nicht aber von der der Kathode ab. Da erstere während des Aufdampfens unverändert bleibt, muß auch V'_m , bestimmt durch den Schnitt der Stromspannungskurven mit der Voltachse, unverändert bleiben.

Mit wie großer Genauigkeit dies der Fall ist, zeigt Abb. 16. Diese Ergebnisse enthalten also eine neue experimentelle Bestätigung der Beziehung $\Delta\Phi = -\Delta\Psi^1$.

Das zweite bemerkenswerte Ergebnis ist die schlechte Sättigung der lichtelektrischen Ströme für geringe Schichtdicken, wie aus Abb. 15 (Kurve für 36 Volt) zu ersehen ist. Die von anderer Seite wiederholt beobachtete Feldabhängigkeit des lichtelektrischen Effektes bei dünnsten Alkalisichten²⁾ konnte also auch hier erneut festgestellt werden; darüber hinaus bietet die Methode die Möglichkeit, diese Feldabhängigkeit in ihrer Abhängigkeit von der Schichtdicke quantitativ zu verfolgen.

Das dritte Ergebnis betrifft die Änderung der Geschwindigkeitsverteilung der austretenden Elektronen für verschiedene Schichtdicken (Abb. 16). Die sehr steile Energieverteilungskurve für reines Platin wird schon bei geringen (eiatomigen) Schichtdicken breiter und erreicht bei etwa 10 Atomlagen den Verlauf für kompaktes Kalium (für 2655 als auslösende Strahlung).

Das vierte Ergebnis betrifft die Lage des Höchstwertes der lichtelektrischen Emission in der Reihe der bei verschiedenen Anodenspannungen erhaltenen Kurven. Dieser Höchstwert, der für eine im Sättigungsgebiet liegende Anodenspannung bei der schon oben erwähnten Schichtdicke von $2,9 \cdot 10^{14}$ Atomen je Quadratcentimeter liegt, verschiebt sich mit zunehmender, den Elektronenaustritt hemmender Spannung zu immer kleineren Schichtdicken, die schließlich weniger als die Hälfte dieses Wertes beträgt. Das ist ein unmittelbarer experimenteller Beweis für das immer stärkere Herabdrücken des „Randes des Elektronennapfes“. Dementsprechend werden die Gruppen der schnelleren Elektronen schon bei geringerer Bedeckung den Napf zur Gänze verlassen können, so daß der diesen Elektronen entsprechende Höchstwert schon viel früher auftreten wird als derjenige, der den langsameren und langsamsten Elektronen entspricht.

1) R. A. Millikan, *Phys. Rev.* [2] 18. S. 236. 1921; P. Lukirski u. S. Prilezaev, *Ztschr. f. Phys.* 49. S. 236. 1928.

2) R. Suhrmann, *a. a. O.*, S. 205–213.

Dies ergibt eine neue Möglichkeit, die Zahl der Elektronen in den einzelnen Energiebändern unmittelbar durch Versuch zu bestimmen.

Für die Strahlung von 4358 aufgenommene Stromspannungskurven zeigen *genau das entgegengesetzte Verhalten* wie die für 2655. Es verläuft nämlich die Stromspannungskurve für eine dicke Kaliumschicht sehr steil, etwa so wie die Kurve für reines Platin für 2655, dagegen sind die Kurven der dünnsten Schichten weniger steil. Diese verschiedene Geschwindigkeitsverteilung der durch 2655 und 4358 ausgelösten Elektronen ist zu erwarten, wenn man lichtelektrischen Volum- und Oberflächeneffekt unterscheidet¹⁾. Da 4358 im selektiven Bereich liegt, muß der Oberflächeneffekt stark überwiegen, (Stromspannungskurven steil), während für 2655 ÅE der Volumeffekt überwiegt. Diese Erscheinung ergibt somit die Möglichkeit, die beiden Effekte gesondert zu untersuchen.

So kann das für 2655 und für 4358 erhaltene Ergebnis in dem Sinne gedeutet werden, daß die Elektronen in den ersten Entwicklungsstadien der Alkalischicht dem Trägermetall entstammen. Man sieht vor allem, daß die Änderung der Geschwindigkeitsverteilung nicht nur in dem Sinne festzustellen ist, daß durch die adsorbierten Atome nur eine Beeinflussung der Austrittsarbeit und dadurch verursachte Zunahme nur der langsamen Elektronen erfolgt. Denn der Tiefwert der Austrittsarbeit wird bei einer Bedeckung von 0,8₅ erreicht; bei dieser Bedeckung aber hat sich (Kurve *b* der Abb. 16, die ungefähr dieser Bedeckung entspricht), die ursprüngliche Geschwindigkeitsverteilung noch kaum geändert. Die große Änderung erfolgt vielmehr (Abb. 16) erst mit zunehmender Schichtdicke, woraus man einerseits schließen kann, daß es sich bei 2655 hauptsächlich um einen Volumeffekt handelt, andererseits, daß die Elektronen bei geringen, unter oder wenig über einer Atomlage dicken Schichten dem Trägermetall entstammen.

Man erkennt, daß diese Methode die Möglichkeit gibt, die mittlere freie Weglänge der lichtelektrisch ausgelösten Elektronen im Metall unmittelbar durch Versuch zu bestimmen. Denn mit zunehmender Schichtdicke muß die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen die in Abb. 16 dargestellte Änderung erleiden und muß bei jener Schichtdicke in eine endgültige Verteilung übergehen, die der mittleren freien Weglänge entspricht. Eine erste, qualitative Bestätigung enthalten schon die hier mitgeteilten Ergebnisse. Bei einer Schichtdicke von etwa 10 Atomlagen nimmt die Geschwindigkeitsverteilung ihre Endform an. Dies gibt eine mittlere freie Weglänge

1) H. Fröhlich, Elektronentheorie der Metalle, Berlin 1936, S. 120.

der lichtelektrischen Elektronen gleich 10^{-7} cm, in Übereinstimmung mit den Erwartungen¹⁾, während ja die mittlere freie Weglänge der Leitungselektronen 10—100 mal größer angesetzt wird.

4. Lichtvektoreffekt

Fast alle Beobachtungen wurden mit polarisierter Strahlung gemacht. Die Lage des Lichtvektors ist in allen Abbildungen und Tabellen vermerkt²⁾. Jedoch muß betont werden, daß die Platinfolie *F*, die anfangs gut spiegelte, nach langem Glühen eine raue Oberfläche bekam. Trotzdem sollen die Ergebnisse bezüglich des Lichtvektoreffektes kurz erwähnt werden. a) Der Verlauf der lichtelektrischen Empfindlichkeitskurven in Abhängigkeit von der Schichtdicke unterscheidet sich für beide Lagen des elektrischen Vektors nicht; ein Höchstwert der Empfindlichkeit tritt für E_{\perp} und E_{\parallel} bei derselben Schichtdicke auf. b) Es konnte keine Abhängigkeit des Vektorverhältnisses von der Schichtdicke festgestellt werden. c) Für die Linien 6072, 5779 und 5461 betrug das Vektorverhältnis ständig 1, für die übrigen Linien schwankte es zwischen 3 und 5 (in verschiedenen Meßreihen), mit einer kaum merklichen Andeutung eines Höchstwertes bei ungefähr 3341.

5. Verlauf der lichtelektrischen Empfindlichkeit für die Gesamtstrahlung der Hg-Lampe

Zum Schlusse sei noch kurz darauf hingewiesen, daß der Gang der lichtelektrischen Empfindlichkeit in Abhängigkeit von der Schichtdicke bei Bestrahlung mit der unzerlegten Strahlung des Hg-Bogens, wie er z. B. in Abb. 4 der vorhergehenden Mitteilung gegeben ist, sich nicht als Summe der durch die einzelnen Linien ausgelösten lichtelektrischen Ströme ergibt. Vielmehr ist der Verlauf der Empfindlichkeit für die Gesamtstrahlung dem für die Strahlung von 2655 beobachteten weitgehend ähnlich, d. h. man beobachtet ein starkes Ansteigen bis zu einer Bedeckung von etwa 0,7 einer einatomigen Schicht, dann aber eine nur sehr geringe weitere Zunahme, ganz im Gegensatz zu dem Verlauf der Empfindlichkeit für die Linien des selektiven Bereiches, für die der Hauptanstieg ja erst später bei einer zwei bis drei Atomlagen dicken Schicht beginnt. Von diesem Anstieg ist in der Kurve für die Gesamtstrahlung fast nichts zu bemerken. Die wenigen hierzu gemachten Beobachtungen gestatten vorläufig keine Schlüsse. Jedoch weisen sie darauf hin, daß

1) H. Fröhlich, a. a. O., S. 121.

2) E_{\perp} bedeutet, daß der elektrische Lichtvektor senkrecht zur Einfallsebene war.

dabei Anregungsvorgänge der die Schicht aufbauenden Zentren mit einer bestimmten Verweilzeit und damit zusammenhängende verstärkende oder schwächende Wirkung der in der Gesamtstrahlung vorhandenen Strahlungen bestimmter Schwingungszahl eine wichtige Rolle spielen.¹⁾

Zusammenfassung

1. Es wird eine Atomstrahlmethode beschrieben, mit der Alkalisichten atomarer Dicke auf Metalle hoher Austrittsarbeit aufgedampft und deren Dicke mit großer Genauigkeit bestimmt werden.

2. Mit dieser Methode wird das lichtelektrische Verhalten solcher Kaliumschichten von der Dicke Null bis zu etwa 30 Atomlagen bei Bestrahlung mit den stärkeren zwischen 6000 ÅE und 2400 ÅE liegenden Linien eines Hg-Bogens untersucht.

3. Der beobachtete Verlauf der lichtelektrischen Empfindlichkeit in Abhängigkeit von der Schichtdicke wird in einer Reihe von Schaubildern gegeben. Es wird gezeigt, welchen Einfluß der Einbau von Gasmolekülen in diese Schichten hat.

4. Nimmt man die Zahl der Kaliumatome in einer einatomigen Schicht unmittelbar auf Platin gleich $4,0 \cdot 10^{14}$ je Quadratzentimeter wahrer Fläche an, so ergeben die Versuche für die sogenannte „günstigste Bedeckung“, bei der die Austrittsarbeit durch einen Tiefwert geht, die Zahl von $2,9 \cdot 10^{14}$ je Quadratzentimeter wahrer Fläche, d. h. etwa 0,7 einer einatomigen Schicht. Bei Einbau von Gasmolekülen ist diese Zahl höher.

5. Der lichtelektrische Effekt dünnster Schichten bis zu 2 bis 3 Atomlagen ist normal.

6. Die Dicke des Beginns des selektiven Effektes beträgt 2 bis 3 Atomlagen.

7. Die zu bestimmten Dicken der Schicht gehörenden Zustände des selektiven Höchstwertes und seiner Lage und der sie beeinflussenden Faktoren werden bestimmt.

8. Die Grenzwellenlänge des höchstentgasten Kaliums wird bei 5461 gefunden, was einer Austrittsarbeit von $2,26 \pm 0,02$ V entspricht. Der tiefste, bei Einbau von Gasmolekülen beobachtete Wert der Austrittsarbeit betrug 2,0 V.

9. Der Beginn und der Höchstwert der lichtelektrischen Emission für die jenseits der Grenze 5461 liegenden Linien 5779 und 6072 tritt nicht bei der „günstigsten Bedeckung“ ein, sondern bei einer fast um das Doppelte höheren.

1) R. Suhrmann, a. a. O. S. 203 usw.

10. Solange noch keine stärkere Beeinflussung der adsorbierten Kaliumionen vorhanden ist, beträgt das Dipolmoment $9,1 \cdot 10^{-18}$ und die Entfernung der positiven Schicht von der Metalloberfläche $1,0 \cdot 10^{-8}$ cm.

11. Die Veränderungen, die durch „Wandern“ der adsorbierten Kaliumatome hervorgerufen werden, werden verfolgt.

12. Es wird die Geschwindigkeitsverteilung der aus verschiedenen dicken Schichten austretenden Elektronen durch Aufnahme von lichtelektrischen Stromspannungskurven bestimmt. Es wird a) ein neuer Beweis für die Beziehung $\Delta \Phi = - \Delta \Psi$ gegeben, b) die Feldabhängigkeit des lichtelektrischen Effektes dünnster Schichten erneut gezeigt, c) gezeigt, daß die Elektronen bei ein- bis zweiatomigen Schichten hauptsächlich dem Trägermetall entstammen, d) gezeigt, daß die Untersuchung der Geschwindigkeitsverteilung der aus dünnsten Schichten austretenden Elektronen eine Möglichkeit zur Untersuchung von Volum- und Oberflächeneffekt als auch zur experimentellen Ermittlung der mittleren freien Weglänge der im Inneren des Metalls ausgelösten lichtelektrischen Elektronen darstellt.

Die vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität München durchgeführt. Für die mir gewährte Gastfreundschaft und für die große Bereitwilligkeit, mit der mir alle Hilfsmittel dieses Institutes zur Verfügung gestellt wurden, sage ich Herrn Prof. Walther Gerlach auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank.

Cernauti, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 16. März 1937)

Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen

III. Die elastischen Konstanten der quas isotropen Mischkörper aus isotropen Substanzen

Von D. A. G. Bruggeman

Die frühere Theorie der DK. und Leitfähigkeit von Mischkörpern wird ausgedehnt auf die elastischen Moduln. Es werden Formeln für die verschiedenen Moduln von Lamellenpaketen und homogenen Substanzen mit zerstreut eingesprengten Kugeln, analog den Formeln von Wiener und Lorentz-Lorenz für die DK., abgeleitet. Daraus ergeben sich die Modulwerte für *granitische Körper* (Gemische aus Körnern zweier Substanzen) sowie für *Kugelporphyre* (homogene Substanzen mit dicht eingestreuten Kugeln); letztere ergeben für Beton eine merkwürdige Folgerung, die durch Messungen bestätigt wird.

1. Das Problem

Es sei gefragt, die Elastizitätskonstanten C , C_1 und C_2 oder auch die Kompressions-, Dehnungs- und Torsionsmoduln K , E und G eines quas isotropen ungeordneten heterogenen Mischkörpers zweier isotroper Substanzen in den Konstanten c'_k bzw. c''_k beider Bestandteile und in dem Volumverhältnis $\delta' : \delta''$ auszudrücken; falls die Form der Körner einen merklichen Einfluß hat, soll auch dieser in den Formeln zum Ausdruck kommen.

Bisher ist diese Frage, soviel ich weiß, nicht theoretisch behandelt worden, wohl aber die mehr verwickelte Frage nach den Moduln eines isotropen Vielkristalls. Hier gibt es einige angenäherte Lösungen, die ich an anderer Stelle⁴⁾ kritisch behandelt habe und die, auf die Mischkörper aus isotropen Substanzen übertragen, ihre Eigenart deutlich hervortun. Mit den Abkürzungen

$$(1a) \quad A_p = \delta' A' + \delta'' A'',$$

$$(1b) \quad \frac{1}{A_q} = \frac{\delta'}{A'} + \frac{\delta''}{A''}$$

sind die verschiedenen Moduln nach Voigt^{1a)}

$$(2) \quad K_V = K_p, \quad G_V = G_p, \quad \text{daher} \quad E_V = \frac{9 K_p G_p}{3 K_p + G_p},$$

nach Reuss^{1b)}

$$(3) \quad K_R = K_q, \quad G_R = G_q, \quad E_R = E_q,$$

nach Huber u. Schmid⁹⁾

$$(4) \quad E = E_p, \quad G = G_p, \quad \text{daher} \quad K = \frac{E_p G_p}{3(3G_p - E_p)},$$

die Korrektur, die Boas²⁾ an letzteren Formeln beim Vielkristallproblem vorgenommen hat, fällt hier weg, weil die von ihm in Betracht gezogene Torsionsbiegung hier nicht auftritt.

Die Formeln (2) bis (4) beruhen auf verschiedenen Stetigkeitsannahmen, die alle mit den Grenzbedingungen an den Körnergrenzen in Widerstreit sind, und sind daher höchstens angenähert richtig. Ich selbst habe früher³⁾ die Moduln berechnet aus den Elastizitätskonstanten C_{ik} eines Lamellenpakets; für diese ergeben sich im nächsten Abschnitt beim Mischkörper einfache Werte und aus diesen erhalten wir

$$(5) \quad \begin{cases} 9K = 2C_{11} + C_{33} + 4C_{13} + 2C_{12}, \\ 15G = \frac{7}{2}C_{11} + C_{33} - 2C_{13} - \frac{5}{2}C_{12} + 6C_{44}. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten mit großer Annäherung für ein sehr spezielles lamellares Aggregat, es fragt sich aber, inwiefern sie die Moduln eines wirklichen Mischkörpers annähern. Darum habe ich das Problem von neuem in Angriff genommen.

2. Die elastischen Konstanten eines Lamellenpakets (Wienersche Grenzformeln für die Elastizität)

Der einfachste Mischkörper besteht aus sehr vielen dünnen Lamellen beider Substanzen, parallel aufgeschichtet im Totalvolumenverhältnis $\delta' : \delta''$; die Elastizitätskonstanten der beiden Substanzen sind mit c', c_1', c_2' bzw. c'', c_1'', c_2'' bezeichnet. Die Z-Achse wird senkrecht zur Lamellenebene, X- und Y-Achse in dieser Ebene gewählt. Es ist dann im Aggregat eine quasihomogene Deformation besonderer Art möglich, nämlich eine solche, daß jede der Komponenten $Z_x, Z_y, Z_z, x_x, y_y, x_y$ überall im Aggregat einen festen Wert hat, während jede der anderen Deformations- und Spannungskomponenten in den Lamellen der beiden Substanzen verschiedene Einzelwerte, in den verschiedenen Teilpaketen aber einen festen Mittelwert aufweist.

Der Mischkörper hat Zylindersymmetrie, seine elastischen Eigenschaften werden durch die 5 Konstanten $C_{11}, C_{33}, C_{12}, C_{13}$ und C_{44} festgelegt. Um diese zu berechnen, reicht die freie Energie ξ nicht aus, statt ihr wähle ich die Funktion

$$(6) \quad \varphi = \xi - Z_x z_x - Z_y z_y - Z_z z_z.$$

Diese Funktion wird in den unabhängigen Variablen Z_x, Z_y, Z_z, x, y, z ausgedrückt. Dies ergibt für das Aggregat

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\bar{\varphi} = & -\frac{1}{C_{33}}Z_x^2 - \frac{1}{C_{44}}(Z_y^2 + Z_z^2) + \left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}\right)(x + y)^2 \\ & + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})(x^2 + y^2 - 4xy) + 2\frac{C_{13}}{C_{33}}Z_x(x + y), \end{aligned} \right.$$

während für die Lamellen der ersten Substanz

$$2\varphi' = -\frac{1}{c'}Z_x^2 - \frac{1}{c_2'}(Z_y^2 + Z_z^2) + \left(c' - \frac{c_1'^2}{c'}\right)(x + y)^2 \\ + \frac{1}{2}(c' - c_1')(x^2 + y^2 - 4xy) + 2\frac{c_1'}{c'}Z_x(x + y),$$

für die der zweiten Substanz eine analoge Gleichung mit Doppelstrichen gilt. Mittelung über beide Substanzen und Gleichsetzung der Koeffizienten der so erhaltenen Gleichung und deren der Gl. (7) ergibt die Beziehungen

$$(8a) \quad \frac{1}{C_{33}} = \frac{\delta'}{c'} + \frac{\delta''}{c''},$$

$$(8b) \quad \frac{1}{C_{44}} = \frac{\delta'}{c_2'} + \frac{\delta''}{c_2''},$$

$$(8c) \quad C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) = \delta'c_2' + \delta''c_2'',$$

$$(8d) \quad \frac{C_{13}}{C_{33}} = \delta'\frac{c_1'}{c'} + \delta''\frac{c_1''}{c''},$$

$$(8e) \quad C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} = \delta'c' + \delta''c'' - \left(\delta'\frac{c_1'^2}{c'} + \delta''\frac{c_1''^2}{c''}\right).$$

Diese Formeln sind die Analoga der Wienerschen Grenzformeln für die DK. (oder Leitfähigkeit) eines Lamellenpakets in der Längs- bzw. Querrichtung

$$(9a) \quad \varepsilon_p = \delta'\varepsilon' + \delta''\varepsilon'',$$

$$(9b) \quad \frac{1}{\varepsilon_q} = \frac{\delta'}{\varepsilon'} + \frac{\delta''}{\varepsilon''}.$$

3. Die Änderungen der elastischen Konstanten einer Substanz durch dünne Binstreuung von Kugeln einer andern Substanz (Lorentz-Lorenz-Formeln für die Elastizität)

Wir denken uns eine isotrope Kugel mit Radius r_0 und Elastizitätskonstanten c', c_1', c_2' zentral eingeschlossen in einer Kugel aus einer andern isotropen Substanz mit Radius r_1 und Konstanten c, c_1, c_2 . Diese Außenkugel wird an seiner ganzen Oberfläche durch eine feste Oberflächenkraft normal gedehnt. Auf jeder mit diesen Kugeln konzentrischen Kugelfläche in der einen oder andern Substanz denken

wir uns ein System von Meridian- und Parallelkreisen, bezogen auf einer festen Achse.

Bei der definierten (negativen) Kompression hat jeder Punkt auf einer solchen Kugelfläche mit Radius r dieselbe radiale Verschiebung $u = f(r)$, seine Verschiebungskomponenten v und w in den Tangenten von Meridian- bzw. Parallelkreisen (t und q) sind gleich Null. Von den 6 Deformationskomponenten haben die Dehnungskomponenten die Werte

$$(10) \quad r_r = \frac{du}{dr}, \quad t_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{u}{r}, \quad q_q = \frac{\partial w}{\partial q} = \frac{u}{r},$$

die Schubkomponenten haben alle den Wert Null. Das Gleichgewicht eines Raumelements in der Außenschale ergibt für die Spannungen die einzige Differentialgleichung

$$(11) \quad Q_q + T_t = 2R_r + r \frac{dR_r}{dr},$$

welche durch Einführung der Deformationen und Anwendung von (10) in

$$(12) \quad r \frac{d^2 u}{dr^2} + 2 \frac{du}{dr} - 2 \frac{u}{r} = 0$$

übergeht, mit der allgemeinen Lösung

$$(13) \quad u = ar + \frac{b}{r^2}$$

(dieselbe Gleichung bei Love¹⁴), 4th ed., S. 142).

Für die Innenkugel wird (13), wegen des Nullwerts der Verschiebung im Mittelpunkt

$$(13a) \quad u = a' r$$

und die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche ergeben

$$a + \frac{b}{r_0^3} = a',$$

$$c \left(a - 2 \frac{b}{r_0^3} \right) + 2c_1 \left(a + \frac{b}{r_0^3} \right) = a' (c' + 2c_1').$$

Unter Benutzung der Bezeichnungen K', G', K, G für die Kompressions- bzw. Torsionsmoduln der beiden Substanzen ergeben diese Gleichungen wegen $3K = c + 2c_1$, $G = \frac{1}{2}(c - c_1)$ usw.

$$a = a' \frac{3K' + 4G}{3K + 4G},$$

$$b = -a' \cdot r_0^3 \frac{3(K' - K)}{3K + 4G}.$$

Für die Außenkugelfläche mit Radius r_1 gilt daher

$$t_i = a' \left[\frac{3K' + 4G}{3K + 4G} - \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^3 \cdot \frac{3(K' - K)}{3K + 4G} \right],$$

$$\frac{1}{3} R_r = a' \left[K \frac{3K' + 4G}{3K + 4G} + 4G \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^3 \frac{K' - K}{3K + 4G} \right].$$

Wir wählen jetzt r_0 sehr klein gegen r_1 und ersetzen das Aggregat durch eine homogene Kugel mit abgeändertem Kompressionsmodul $K + dK$, wo die gleiche Oberflächenkraft R_r dieselbe Dehnung, (also gleiche t_i) erzeugt. Es gilt dann

$$(14) \quad K + dK = \frac{\frac{1}{3} R_r}{t_i} = K + \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^3 (K' - K) \frac{3K + 4G}{3K' + 4G}.$$

Hier bedeutet $\left(\frac{r_0}{r_1} \right)^3$ den Volumanteil der eingeschlossenen Kugel; diese ist sehr klein gegen das Gesamtvolum, daher auch ihr Einfluß in den äußeren Schichten; (14) gilt daher auch für nichtzentrale Einsprengung und außerdem ist für die Außenfläche die Kugelform nicht notwendig. Sind schließlich mehrere kleine Kugeln derselben Kompressibilität weit voneinander und von der Oberfläche entfernt eingestreut, so lassen sich ihre Einflüsse auf dem Kompressionsmodul summieren; ist der Gesamtvolumanteil der eingestreuten Kugeln δ , so gilt nach (14):

$$(15) \quad dK = \delta \cdot (K' - K) \frac{3K + 4G}{3K' + 4G}$$

die *Lorentz-Lorenz-Formel* für den *Kompressionsmodul*. Schreiben wir die Kompressibilität $\frac{1}{K} = \kappa$ und die Torsionszahl $\frac{1}{G} = g$, so folgt aus (15)

$$(15a) \quad d\kappa = \delta (\kappa' - \kappa) \frac{4\kappa + 3g}{4\kappa' + 3g}$$

die *L-L-Formel* für die *Kompressibilität*.

Um analoge Formeln für *Torsionsmodul* und *Torsionszahl* abzuleiten, gehen wir von demselben Aggregat aus und versuchen, diesem eine Deformation aufzuzwingen, die reinen Schubcharakter besitzt. An jeder Stelle mit der Poldistanz Θ habe die Verschiebung w die Richtung der Tangente eines Parallelkreises und den Wert $w = f(r) h(\Theta)$, d. h. daß w über jeden Parallelkreis konstant und über alle konzentrischen Kugelflächen proportional verteilt ist. Diese Verteilung wird bestimmt durch die Verteilungsfunktion der äußeren Kraft an der Kugeloberfläche, wir wählen diese so, daß

$$(16) \quad h(\Theta) = \sin 2\Theta,$$

die einfache Torsion, wobei die Verschiebung an Polen und Äquator den Wert Null hat. Jetzt haben von den Deformationen bloß

$$q_r = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}, \quad q_t = \frac{\partial w}{r \partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial \vartheta} = \frac{\partial w}{r \partial \Theta} - \frac{w}{r} \cotg \Theta$$

Werte, die von Null verschieden sind, von den Spannungen nur

$$Q_r = G q_r, \quad Q_t = G q_t.$$

Die einzige Gleichgewichtsbedingung für ein Raumelement der Außenschale ist hier

$$(17) \quad Q_r + r \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_t}{\partial \Theta} = 0$$

oder bei Übergang auf Deformationen und Eintragung des w -Werts:

$$(18) \quad r^2 \frac{d^2 f}{f dr^2} = - \frac{d^2 h}{h d\Theta^2} + \frac{d(h \cotg \Theta)}{h d\Theta}.$$

Daraus folgt

$$(19a) \quad r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} = k f,$$

$$(19b) \quad \frac{d^2 h}{d\Theta^2} - \frac{d(h \cotg \Theta)}{d\Theta} = -k h.$$

Mit dem h -Wert von (16) ergibt (19b) $k = 2$ und sodann (19a) die Lösung

$$(20) \quad f = a r^2 + \frac{b}{r},$$

das Analogon der Gl. (13) bei der Kompression. Für die Innenkugel gilt

$$(20a) \quad f = a' r^2,$$

und aus den Grenzbedingungen folgen die Beziehungen

$$a = a' \frac{2G + G'}{3G}, \quad b = -a' r_0^3 \frac{G' - G}{3G}.$$

Daraus folgen Verschiebung und Tangentialkraft an der Außenfläche

$$w = r^2 \frac{a'}{3G} \left[G' + 2G - (G' - G) \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^3 \right] \sin 2\Theta,$$

$$R_\vartheta = \frac{a' r}{3} \left[G' + 2G + 2(G' - G) \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^3 \right] \sin 2\Theta$$

und für die homogene Kugel mit abgeändertem Torsionsmodul $G + dG$, die bei denselben äußeren Kräften dieselben Verschiebungen an der Oberfläche aufweist, gilt daher bei kleinem Verhältnis r_0/r_1 :

$$(21) \quad \frac{G + dG}{r} = \frac{R_\vartheta}{w} = \frac{G}{r} \left[1 + \frac{3(G' - G)}{G' + 2G} \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^3 \right].$$

Nehmen wir an, wie es allgemein in der Elastizitätstheorie geschieht und durch die Erfahrung bestätigt wird, daß der Torsionsmodul von der speziell gewählten Deformation unabhängig ist, so behauptet (21)

gerade wie (14) ihre Gültigkeit für willkürliche Form des Außenkörpers und willkürliche Lage der Innenkugel. Die Änderungen des G durch mehrere, genügend weit zerstreute Kugeln mit gleichem G -Modul lassen sich addieren, beträgt ihr Gesamtvolumanteil δ , so folgt aus (21)

$$(22) \quad dG = \delta \cdot 3G \frac{G' - G}{G' + 2G},$$

die *L.-L.-Formel* für den *Torsionsmodul*.

Anders als (15) stimmt diese zweite *L.-L.-Formel* genau mit der ursprünglichen Gleichung von Lorentz¹²⁾ und Lorenz¹³⁾ für die DK., die von Rayleigh¹⁴⁾ auf Grundsubstanzen mit DK. ungleich 1 ausgedehnt worden ist, überein. Dies hängt wohl hiermit zusammen, daß beim einfachen Schub eine einfache Proportionalität zwischen einer Spannungs- und einer Deformationskomponente auftritt, ähnlich wie zwischen \mathfrak{D} und \mathfrak{E} im elektrischen Problem.

Für die *Torsionszahl* $g = \frac{1}{G}$ folgt aus (22)

$$(22a) \quad dg = \delta \cdot 3g \frac{g' - g}{2g' + g},$$

die *L.-L.-Formel* für die *Torsionszahl*.

Für den *Dehnungsmodul* E oder seinen Reziprokwert, die *Dehnungszahl* s , gibt es nicht eine so einfache Formel. Aus den bekannten Formeln der Elastizitätstheorie

$$\frac{1}{3} \kappa = s + 2s_1, \quad g = 2s - 2s_1$$

folgt aber

$$(23) \quad s = \frac{1}{9} \kappa + \frac{1}{3} g$$

und daher nach (15a) und (22a)

$$(24) \quad ds = \delta \left[\frac{1}{9} (\kappa' - \kappa) \frac{4\kappa + 3g}{4\kappa' + 3g} + (g' - g) \frac{g}{2g' + g} \right],$$

die *L.-L.-Formel* für die *Dehnungszahl*.

4. Berechnung der elastischen Moduln

für zwei einfache Mischkörper: Lamellen- und Kugelgemische

Auf den Grundformeln des 2. und 3. Abschnitts wird die Elastizitätstheorie der Mischkörper mittels einiger Grundannahmen und Grundsätze, die denen des I. Teils⁵⁾ dieser Arbeit entsprechen, aufgebaut. Der Mischkörper besteht aus Elementen zweier Substanzen, die 5 Grundannahmen fordern die *Isotropie*, *Kleinheit*, *Ungeordnetheit*, *Gleichwertigkeit* und *feste Zusammenschließung* dieser Elemente. Die 4 Grundsätze (I–IV) entstehen aus denen der

Theorie von DK. und Lfk. (a. a. O., S. 642), indem überall \mathfrak{D} und \mathfrak{E} bzw. durch Spannung und Deformation ersetzt werden.

Als ersten einfachen Mischkörper betrachten wir das Gemisch, das bis auf eine verschwindende Menge Zwischensubstanz aus dünnen Lamellen der beiden Substanzen besteht; die Lamellen beider Arten treten in allen möglichen Richtungen mit gleicher Häufigkeit auf, und das Gesamtvolumverhältnis beträgt $\delta' : \delta''$. Im Aggregat herrscht ein quasihomogenes *Kompressionsfeld* mit Komponenten (im raumfesten $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ -System).

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{Y}_y = \mathfrak{Z}_z = p, \quad \mathfrak{X}_x = \mathfrak{Y}_y = \mathfrak{Z}_z = 3 K_t p,$$

während die anderen Deformations- und Spannungskomponenten Null sind. In irgendeiner Lamelle haben, wenn wir die Z-Achse in der Lamellennormale, also X- und Y-Achse in der Lamellenebene wählen, folgende Komponenten (nach II und III) die Werte

$$x_x = y_y = p, \quad z_z = 3 K_t p, \quad x_y = z_y = z_x = 0.$$

Die übrigen Komponenten haben in den Lamellen beider Substanzen verschiedene Werte, ihre Mittelwerte folgen aus

$$\bar{X}_x = \bar{Y}_y = (C_{11} + C_{12})p + C_{13}\bar{z}_z, \quad 3K_t p = 2C_{13}p + C_{33}\bar{z}_z, \quad \bar{X} = \bar{z}_y = \bar{z}_x = 0,$$

wobei die C_{ik} durch die Gl. (8) bestimmt werden. Durch Transformierung auf das $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ -System und Mittelung über alle Lamellen-lagen erhalten wir nach einiger Rechnung

$$\bar{\mathfrak{E}}_x = \bar{\mathfrak{Y}}_y = \bar{\mathfrak{Z}}_z = \frac{1}{3} p \frac{2(C_{33} - C_{13}) + 3K_t}{C_{33}},$$

$$\bar{\mathfrak{X}}_x = \bar{\mathfrak{Y}}_y = \bar{\mathfrak{Z}}_z = \frac{1}{3} p \frac{3K_t(C_{33} + 2C_{13}) + 2[(C_{11} + C_{12})C_{33} - 2C_{13}^2]}{C_{33}},$$

daher (nach IV)

$$3K_t = \frac{3K_t(C_{33} + 2C_{13}) + 2[(C_{11} + C_{12})C_{33} - 2C_{13}^2]}{3K_t + 2(C_{33} - C_{13})}$$

oder

$$(25) \quad K_t = \frac{1}{6} [4C_{13} - C_{33} + \sqrt{8C_{13}^2 + C_{33}^2 + 4C_{33}(C_{11} + C_{12} - 2C_{13})}],$$

die Formel für den *Kompressionsmodul des isotropen Lamellen-aggregats*.

Jetzt legen wir ins Aggregat ein quasihomogenes *Schubfeld* mit

$$\mathfrak{Z}_y = q, \quad \mathfrak{Z}_y = G_t q,$$

während alle anderen Komponenten Null sind. Jede Lamelle entnimmt dem Feld (nach II und III) 3 Spannungs- und 3 Deformationskomponenten, alle im allgemeinen von Null verschieden, die Mittelwerte der anderen 6 Komponenten lassen sich mittels (8) ausdrücken. Transformierung auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ ergibt jetzt

$$\bar{\delta}_9 = \frac{1}{15} q \left(7 + 2 \frac{C_{13}}{C_{33}} \right) + \frac{2}{15} G_l q \left(\frac{2}{C_{33}} + \frac{3}{C_{44}} \right),$$

$$\bar{\delta}_9 = \frac{2}{15} G_l q \left(4 - \frac{C_{13}}{C_{33}} \right) + \frac{1}{15} q \left[3(C_{11} - C_{12}) + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12}) - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right]$$

und daraus mittels IV nach Lösung der erhaltenen quadratischen Gleichung:

$$(26) \quad G_l = \frac{-4 C_{13} + C_{33} + \sqrt{(4 C_{13} - C_{33})^2 + 4 \left(2 + \frac{3 C_{33}}{C_{44}} \right) \left(7 C_{11} - 5 C_{12} - 2 \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) C_{33}}}{4 \left(2 + 3 \frac{C_{33}}{C_{44}} \right)},$$

die Formel für den *Torsionsmodul des isotropen Lamellenaggregats*.

Aus (25) und (26) folgt der Dehnungsmodul $E_l = \frac{1}{s_l}$ mittels (23).

Der zweite einfache Mischkörper besteht aus Kugeln zweier Substanzen mit Kompressions- und Torsionsmoduln bzw. K' und G' , K'' und G'' im Volumverhältnis $\delta':\delta''$ zusammen mit einer verschwindend kleinen Menge Zwischensubstanz; seine Aggregatsmoduln sind K_k und G_k . Dieser Körper läßt sich aufbauen durch abwechselnde sehr kleine Einstreuungen $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4, \dots$ der einen bzw. der anderen Substanz in ein ursprünglich homogenes isotropes Medium mit den Moduln K_k und G_k , in der Weise, daß jede 2., 4., 6. Einsprengung bzw. die Änderung des einen oder anderen Moduls durch die 1., 3., 5. aufhebt (für die zwei verschiedenen Moduln mögen die Teileinsprengungen verschiedene Größen haben); nach der letzten Teileinsprengung ist das Aggregat bis auf einen verschwindenden Rest aus Kugeln zusammengesetzt.

Zuerst wenden wir dieses Verfahren beim Kompressionsmodul an. Es gelten dann nach (15) und II für die n te Doppeleinstreuung:

$$\delta'_n (K' - K_k) \frac{3 K_k + 4 G_k}{3 K' + 4 G_k} + \delta''_n (K'' - K_k) \frac{3 K_k + 4 G_k}{3 K'' + 4 G_k} = 0$$

oder nach Summierung über alle Teileinsprengungen

$$\delta' \frac{K' - K_k}{3 K' + 4 G_k} + \delta'' \frac{K'' - K_k}{3 K'' + 4 G_k} = 0.$$

Hieraus folgt mit Anwendung der Notierung (1a) zusammen mit

$$(1c) \quad A_r = \frac{A' A''}{A_q} = \delta' A' + \delta'' A',$$

die Formel für den *Kompressionsmodul des Kugelaggregats*

$$(27) \quad K_k = \frac{3 K' K'' + 4 G_k K_p}{3 K_r + 4 G_k}$$

und aus dieser Gleichung [oder aus (15a)] für die *Kompressibilität*

$$(27a) \quad \kappa_k = \frac{4 \kappa' \kappa'' + 3 g_k \kappa_p}{4 \kappa_r + 3 g_k}.$$

In derselben Weise folgt aus (22)

$$\delta' \frac{G' - G_k}{G' + 2 G_k} + \delta'' \frac{G'' - G_k}{G'' + 2 G_k} = 0,$$

daher

$$2 G_k^3 - (2 G_p - G_r) G_k - G' G'' = 0$$

oder nach Lösung dieser Gleichung

$$(28) \quad G_k = \frac{1}{4} [2 G_p - G_r + \sqrt{(2 G_p - G_r)^2 + 8 G' G''}]$$

die Formel für den *Torsionsmodul des Kugelaggregats*, in vollkommener Übereinstimmung mit der entsprechenden Formel für die DK. Aus (28) oder auch aus (22a) folgt für die *Torsionszahl*

$$(28a) \quad g_k = \frac{1}{2} g_p - g_r + \sqrt{\left(\frac{1}{2} g_p - g_r\right)^2 + 2 g' g''}.$$

Der G_k -Wert aus (28), eingetragen in (27), ergibt K_k ausgedrückt in den Moduln (auch den Torsionsmoduln) der beiden Substanzen und in der Verhältniszahl; ebenso g_k aus (28a) in (27a). Schließlich erhalten wir die *Dehnungszahl* $s_k = \frac{1}{E_k}$ aus (27a), (28a) und (23).

5. Die Moduln der Polyedergemische.

Vergleichung der verschiedenen älteren und neuen Formeln

Die Gl. (25) bis (28) für Lamellen- und Kugelaggregate stellen Extremwerte für die Moduln irgendeines Polyedergemisches dar. Hierin stimmen sie mit den Gl. (31a) und (33a) des I. Teils⁵⁾ (a. a. O., S. 653) überein, die Formeln (25) bis (27) sind aber weniger einfach. Dadurch ist es schwerer, vielleicht gar unmöglich, um hier allgemeine Beziehungen zwischen den $K_k \delta'$ - und $K_l \delta'$ - bzw. $G_k \delta'$ - und $G_l \delta'$ -Kurven abzuleiten, wie ich es früher für die $\epsilon_k \delta'$ - und $\epsilon_l \delta'$ -Kurven getan habe. Ich habe darum die Abhängigkeit der Extremmoduln vom Mischungsverhältnis zahlenmäßig berechnet. In den Tabellen 1a–c findet sich fett gedruckt das Ergebnis für zwei Substanzen mit den Elastizitätskonstanten $c' = 12$, $c_1' = 6$, $c_2' = 3$ bzw. $c'' = 4$, $c_1'' = 2$, $c_2'' = 1$, „elastisch-ähnliche“ Substanzen; für nicht ähnliche Substanzen ist der Verlauf wenig verschieden.

Neben diesen Extremwerten finden sich in den Tabellen die Annäherungswerte G_V usw., G_E usw., G_{HS} usw. und G_B usw. nach den Formeln von Voigt¹⁸⁾, Reuss¹⁹⁾, Huber-Schmid⁹⁾ und nach der alten Methode meiner Dissertation³⁾ berechnet, außerdem die Ergebnisse G_L usw. der *logarithmischen Mischungsformel* von Lichten-ecker¹⁰⁾ und G_{LR} usw. der späteren allgemeinen Formel von Lichten-ecker und Rother¹¹⁾, wovon noch die Rede sein wird, letztere berechnet nach passender Wahl der von den Autoren unbestimmt gelassenen Konstante k dieser Gleichung.

Tabelle 1

Moduln eines Mischkörpers aus „elastisch-ähnlichen“ Substanzen (12, 6, 3; 4, 2, 1)

a) Torsionsmoduln

δ'	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	Formel
$G_V = G_{HS}$	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	(2), (4)
$G_{LR}^{(1/2)}$	1,139	1,289	1,452	1,630	1,820	2,026	2,245	2,480	2,730	(31)
G_L	1,116	1,246	1,390	1,552	1,732	1,933	2,158	2,408	2,688	(29)
G_k	1,129	1,276	1,441	1,624	1,823	2,037	2,263	2,5	2,746	(28)
G_B	1,140	1,285	1,437	1,597	1,767	1,951	2,155	2,387	2,660	(5)
G_t	1,138	1,279	1,425	1,580	1,748	1,932	2,138	2,375	2,655	(26)
G_R	1,072	1,154	1,25	1,364	1,5	1,667	1,875	2,143	2,5	(3)

b) Kompressionsmoduln

δ'	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	Formel
$K_V = K_{HS}$	3,2	3,733	4,267	4,8	5,333	5,867	6,4	6,933	7,467	(2), (4)
K_L	2,977	3,322	3,708	4,138	4,618	5,155	5,754	6,422	7,168	(29)
$K_{LR}^{(-1/2)}$	2,938	3,246	3,595	3,993	4,447	4,969	5,568	6,259	7,065	(31)
K_k	2,915	3,206	3,549	3,950	4,418	4,958	5,580	6,289	7,094	(27)
K_B	2,970	3,296	3,645	4,024	4,445	4,918	5,467	6,121	6,933	(5)
K_t	2,969	3,286	3,627	4	4,417	4,890	5,442	6,103	6,927	(25)
K_R	2,857	3,077	3,333	3,637	4	4,444	5	5,715	6,667	(3)

c) Dehnungsmoduln

δ'	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	Formel
$E_V = E_{HS}$	3,2	3,733	4,267	4,8	5,333	5,867	6,4	6,933	7,467	(2), (4)
$E_{LK}^{(1/2)}$	3,020	3,408	3,833	4,297	4,8	5,342	5,934	6,575	7,263	(31)
E_L	2,978	3,322	3,708	4,138	4,619	5,156	5,755	6,423	7,168	(29)
E_k	3,000	3,380	3,808	4,285	4,807	5,374	5,980	6,624	7,295	(23)
E_B	3,033	3,411	3,810	4,231	4,681	5,170	5,714	6,337	7,067	(5)
E_t	3,027	3,396	3,779	4,189	4,631	5,122	5,672	6,307	7,062	(23)
E_R	2,857	3,077	3,333	3,637	4	4,444	5	5,715	6,667	(3)

Die verschiedenen Extremwertepaare zeigen einen Verlauf ähnlich dem der DK. und Lfk. für Kugel- und Lamellengemische: für kleine δ' -Werte hat das Lamellen-, für größere δ' das Kugelaggregat die größeren Moduln und für jeden Modul schneiden sich die zwei Kurven bei irgendeinem δ' -Wert zwischen 0 und 1. Nur die Lage des Schnittpunkts ist verschieden, bei der DK. (Lfk.) lag es ziemlich in der Mitte der Strecke 0 bis 1, jetzt bei der G -Kurve ungefähr bei $\delta' = 0,2$. Die Erklärung ist nicht schwer. Bei den elektrischen Problemen, bei der Stromleitung z. B., wirken die Lamellen der besser leitenden Substanz, die der Stromrichtung

parallel sind, fördernd, die Querlamellen der mehr isolierenden Substanz aber hindernd und die Gesamtleitfähigkeit weicht nicht allzusehr von dem Wert beim Kugelaggregat ab. Der Schub aber wird zwar gefördert durch Lamellen der weniger schubfesten Substanz parallel der Schubrichtung, aber die Querlamellen der schubfesteren Substanz werden gedreht oder verschoben und können das erste Ergebnis wenig schwächen, das Resultat ist ein relativ größerer Schub, d. h. ein kleiner G -Modul für das Lamellenaggregat, in Übereinstimmung mit Tab. 1a. Nach dieser Beweisführung soll für den lamellaren Mischkörper auch E , nicht aber K relativ niedrig sein (weil die Dehnung auch derartige Vorzugsorientierungen aufweist, die Kompression aber nicht); dies wird von den Tabellen 1b und 1c bestätigt.

Eine experimentelle Prüfung der obigen qualitativen Ergebnisse, womöglich auch der quantitativen Formeln (25) bis (28) an natürlichen oder künstlichen Mischkörpern, wäre sehr erwünscht, leider liegen hier große praktische Schwierigkeiten, die wohl besonders auf dem Versagen der 5. Grundannahme des festen Zusammenschließens der Elemente beruhen: sowohl Voigts¹⁷⁾ Elastizitätskonstanten bei dichten Gesteinen wie die Ergebnisse von Graf¹⁾ bei Beton haben gezeigt, wie ungenügend diese Annahme bei Mischkörpern erfüllt ist. Bei der Unmöglichkeit solcher äußerer Prüfungen sind wir vorläufig auf innere Prüfungen angewiesen. Eine solche gibt die obige Beweisführung. Wird c_2 sehr klein gegen die anderen Ausgangskonstanten, so wird der Schub im Lamellenaggregat für jeden endlichen δ -Gehalt sehr groß und die G, δ -Kurve verläuft bis in der Nähe von $\delta = 1$ fast horizontal; dies stimmt mit der Gl. (26), weil nach (8) C_{44} als einzige der C_{ik} sehr klein wird. Eine weitere Bestätigung erhalten (25) und (26) durch die nahe Übereinstimmung der Zahlenwerte K_i und G_i mit den Annäherungswerten K_B und G_B , die auf ganz andere Weise für spezielle Lamellenaggregate abgeleitet worden sind (vgl. Tab. 1).

Die Formeln (25) bis (28) ergeben die Aggregatsmoduln für die extremen Elementenformen: *Lamelle* und *Kugel*; wir dürfen annehmen, daß für einen Mischkörper aus *polyedrischen Körnern* jeder Modul irgendwo zwischen den Extremwerten desselben Moduls liegt, für *isodiametrische Körner* wohl in der Nähe des Kugelwerts, so daß hier die *Kugelformeln* (27) und (28) eine gute Annäherung ergeben. Exakte Formeln für Polyedergemische abzuleiten, scheint wegen der Unstetigkeiten an Kanten und Ecken ausgeschlossen.

Von den älteren Vielkristallformeln, beim Mischkörper aus isotropen Elementen angewandt, ergeben die Gl. (2) und (4) durch-

weg zu große (bei „elastisch ähnlichen“ Substanzen identische), die Gl. (3) zu kleine Modulwerte. Meine eigenen Gl. (5) schließen sich den neuen Extremwerten besser an, liegen beinahe überall zwischen ihnen und wie bemerkt in der Nähe der neuen L -Moduln, sind daher für größere δ' -Werte als Annäherungen für Körneraggregatsmoduln etwas klein.

Schließlich noch einiges über die mit L und LR bezeichneten Modulwerte der Tab. 1. Erstere sind berechnet mit der *logarithmischen Mischungsformel*, in allgemeiner Fassung:

$$(29) \quad A_L = A'^{\delta'} \cdot A''^{\delta''},$$

die Lichtenecker¹⁰⁾ für Vektorquotienten wie DK ., Leitfähigkeit und elektrischen Widerstand aufgestellt hat. Im Gebiet der Elastizität hat Herr Lichtenecker, wie er mir schrieb, seine Formel nie angewandt, hier gab sie für unsere Zahlenbeispiele eine weit bessere Annäherung als die Formeln (2) bis (4), besonders für den *Torsionsmodul* schließt sie sich so gut den G_L -Werten an, daß ich sie hier als bequem zu handhabende Formel hinschreiben will.

$$(30) \quad G_L = G'^{\delta'} \cdot G''^{\delta''}$$

oder

$$(30a) \quad \log G_L = \delta' \log G' + \delta'' \log G''.$$

Später haben Lichtenecker und Rother¹¹⁾ bewiesen, daß für Mischungen, wo das Gruppenprinzip gilt, d. h. wo das Mischungsgesetz bei wiederholter Mischung ungeändert bleibt, die allgemeinere Formel

$$(31) \quad A^k = \delta' A'^k + \delta'' A''^k$$

gilt, wobei k unbestimmt bleibt; für $k = 0$ geht (31) in (29) über. Früher habe ich⁶⁾ den Geltungsbereich dieser Formel für DK ., Lfk ., zum Teil auch Brechungsexponenten von heterogenen und homogenen Mischungen untersucht und sie im allgemeinen bestätigt gefunden bei passender Wahl der Konstante k . Dies ist auch einigermaßen der Fall für die elastischen Moduln; mit den k -Werten $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$ bzw. für G , K und E schließen sich die LR -Werte ziemlich gut den Kugelaggregatswerten an; auch hier ist die Übereinstimmung am besten beim G -Modul. Allerdings haben die LR -wie auch die L -Kurven für die berechneten Mischkörper einen etwas andern Verlauf als die L - und k -Kurven; wo außerdem nicht feststeht, wie stark die Konstanten der Formeln (31) von den Elastizitätskonstanten der Grundsubstanzen abhängen, scheint es noch nicht vorteilhaft, die Gl. (27) und (28) durch (31) zu ersetzen.

6. Die Moduln der porphyrischen Körper

Ebenso wie die DK. und Lfk.⁵⁾ ändern auch die elastischen Moduln eines Mischkörpers sich, wenn bei gleichbleibenden Substanzen in gleichbleibendem Verhältnis der Aufbau in der Weise geändert wird, daß die 4. Grundannahme der *Gleichwertigkeit der Elemente* durch die Forderung der *Einstreuung* einer Substanz in die andere ersetzt wird. Hier wie früher lassen sich Formeln für *Lamellen- und Kugelporphyre* (als Extremgebilde in der Reihe der *Körnerporphyre*) ableiten. Ich beschränke mich hier auf die *quasiisotropen Kugelporphyre*, Mischkörper, die in den verschiedenen Betonarten weitgehend verwirklicht sind.

Es seien also isotrope Kugeln einer Substanz mit Elastizitätskonstanten c', c_1', c_2' eingestreut in ein homogenes isotropes Medium mit Konstanten c'', c_1'', c_2'' . Die Totaleinstreuung δ' wird erreicht als Summe vieler Teileinstreuungen $d\delta'$. Ist in der Weise ein gewisser Gehalt δ' erreicht, so wird dieser um $d\delta'$ erhöht durch die (größere) Teileinsprengung $\frac{d\delta'}{1-\delta'}$. Dies ergibt nach (22a) und (15a) die folgenden Änderungen der elastischen Aggregatkonstanten:

$$(32) \quad dg = \frac{d\delta'}{1-\delta'} 3g \frac{g'-g}{2g'+g},$$

$$(33) \quad d\kappa = \frac{d\delta'}{1-\delta'} (\kappa' - \kappa) \frac{4\kappa + 3g}{4\kappa' + 3g}.$$

Die Integration von (32) ergibt:

$$(34) \quad 1 - \delta' = \frac{g' - g}{g' - g''} \sqrt[3]{\left(\frac{g''}{g}\right)^2},$$

wodurch die Torsionszahl g des Porphyrs in den Torsionszahlen der beiden Bestandteile und dem Volumanteil der eingestreuten Substanz ausgedrückt wird, für $\delta' = 0$ bzw. 1 wird $g = g''$ bzw. g' , wie zu erwarten war. Um auch (33) zu integrieren, bringen wir diese Gleichung mittels $\lambda = 4(\kappa - \kappa')$ in die Form

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = - \frac{d\delta'}{1-\delta'} \left(1 + \frac{\lambda}{4\kappa' + 3g}\right), \text{ daher } \frac{d\delta'}{4\kappa' + 3g} = d\left(\frac{1-\delta'}{\lambda}\right).$$

Die Integration ergibt:

$$(35) \quad \frac{1-\delta'}{\lambda} = \int_{\delta_1'}^{\delta'} \frac{d\delta'}{4\kappa' + 3g}.$$

An der Grenze $\delta' = 1$ wird $\lambda = 0$, also $\kappa = \kappa'$; die andere Grenzbedingung liefert die Integrationskonstante δ_1' mittels:

$$(35a) \quad \frac{1}{4(\kappa' - \kappa'')} = \int_0^{\delta_1'} \frac{d\delta'}{4\kappa' + 3g}.$$

Aus (35) und (35a) folgt nach Eintragung des λ -Werts:

$$(36) \quad \frac{1 - \delta'}{\alpha - \alpha'} = \frac{1}{\alpha'' - \alpha'} + 4 \int_0^{\delta'} \frac{d\delta'}{4\alpha' + 3g}.$$

Wird (34) nach g gelöst und der erhaltene Wert in (36) eingetragen, so erhalten wir auch α ausgedrückt in δ' . Auch können wir zwischen (34) und (36) δ' eliminieren, also α in g ausdrücken, das Ergebnis ist nach einiger Rechnung:

$$(37) \quad \frac{g' - g}{\alpha' - \alpha} = \frac{2}{3} + \left(\frac{g' - g''}{\alpha' - \alpha''} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{g}{g''} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \left(g' - \frac{2}{3} \alpha' \right) g^{\frac{2}{3}} \int_{g''}^g \frac{g^{-\frac{5}{3}}}{4\alpha' + 3g} dg.$$

Die Gl. (34) und (36) oder (37) ergeben bzw. die *Torsionszahl* und die *Kompressibilität des Kugelporphyr*s; daraus folgt die *Dehnungszahl* s nach der bekannten Gleichung:

$$(23) \quad s = \frac{1}{9} \alpha + \frac{1}{3} g.$$

7. Maximum oder Minimum des Dehnungsmoduls bei einer bestimmten Zusammensetzung gewisser Kugelporphyre

Die Gleichungen des vorigen Abschnitts ergeben eine merkwürdige Folgerung. Nach (32) und (33) verlaufen die *Torsionszahl* und die *Kompressibilität* eines Kugelporphyr's *monoton*, jede auf der ganzen Strecke entweder ansteigend oder abfallend. Dasselbe gilt nicht für die *Dehnungszahl*. Wählen wir für Grundmasse und Einstreuungskugeln zwei Substanzen, deren g und α in verschiedener Richtung voneinander abweichen, z. B. $\alpha' < \alpha''$ und $g' > g''$, so besteht wegen:

$$(38) \quad ds = \frac{1}{9} d\alpha + \frac{1}{3} dg$$

die Möglichkeit, daß irgendwo auf der Strecke zwischen $\delta' = 0$ und $\delta' = 1$ $ds = 0$ wird, die *Dehnungszahl* also ein *Maximum* oder *Minimum* aufweist. Die notwendige Bedingung ist nach (38)

$$(39) \quad \frac{d\alpha}{dg} = -3,$$

also nach (32) und (33):

$$\frac{\alpha' - \alpha}{g' - g} = -9 \frac{g(4\alpha' + 3g)}{(2g' + g)(4\alpha + 3g)}.$$

oder nach $\alpha' - \alpha$ gelöst:

$$(40) \quad \alpha' - \alpha = \frac{1}{8} \left[4\alpha' + 3g \pm \sqrt{(4\alpha' + 3g)^2 + 144 \frac{g(g' - g)(4\alpha' + 3g)}{2g' + g}} \right].$$

Um Substanzen aufzusuchen, wo das Maximum oder Minimum irgendwo auf der Strecke 0—1 verwirklicht ist, geben wir vorerst der eingestreuten Substanz die (nie exakt, bei Quarz angenähert erfüllte) Eigenschaft, daß die Querkontraktion bei der Dehnung gleich Null ist; da wird $g' = \frac{2}{3} \kappa'$, (37) wird stark vereinfacht und aus (40) folgt:

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} g' - g &= \frac{1}{8} \left[2 + \left(\frac{g}{g''} \right)^{\frac{2}{3}} \left(3 \frac{g' - g''}{\kappa' - \kappa''} - 2 \right) \right] \\ &\cdot [(2g' + g) \pm \sqrt{(2g' + g)^2 + 48g(g' - g)}]. \end{aligned} \right.$$

Mittels (41) lassen sich Substanzen aufsuchen, die das Maximum oder Minimum verwirklichen, so tritt für $g' = 9$, $\kappa' = 13,5$, $g'' = 15,875$, $\kappa'' = 4,337$ bei $\delta' = 0,946$ ein Minimum der Dehnungszahl auf. Zwar ist die erste dieser zwei Substanzen noch nicht physikalisch möglich, aber die geringste Vergrößerung von g' gibt ihr schon eine positive, also mögliche Querkontraktion, während der δ' -Wert vorläufig noch zwischen 0 und 1 liegt, somit ist bewiesen, daß bei geschickter Wahl der Substanzen für eine bestimmte Zusammensetzung ein porphyrischer Mischkörper eine kleinere Dehnungszahl als jede seiner Komponenten aufweist.

8. Anwendung der Theorie bei Betonarten

Der Kugelporphyr der letzten Abschnitte ist ziemlich genau verwirklicht im Beton. Die nichtarmierten Betonarten bestehen aus einer mehr oder weniger homogenen Grundsubstanz (Mörtel) mit eingeschlossenen Elementen einer zweiten Substanz, die meistens abgerundet und oft weitgehend isotrop sind. Ist letztere Substanz Kies bzw. Kalksteinschotter, so sind ihre Moduln durch Messungen von Voigt¹⁷⁾ bekannt. Die Konstanten der Grundmasse hängen stark von Material und Bereitungsweise ab; Graf⁷⁾ hat den E -Modul eines reinen Mörtels bestimmt. Für den Schubmodul der reinen Grundsubstanz habe ich keine Daten gefunden, ältere Messungen von Bach und Graf¹⁾, wie neuere von Graf⁸⁾, ergeben aber in guter Übereinstimmung Werte, aus denen hervorgeht, daß der Mörtel einem isotropen Quarz „elastisch ähnlich“ ist, und daraus läßt sich mit genügender Genauigkeit der G -Modul des reinen Mörtels berechnen. Genügte der Beton den 5 Grundannahmen des 4. Abschnitts (mit ersetzter vierter Annahme), so ließen sich die Porphyrrformeln quantitativ prüfen. Dies ist aber nicht der Fall: aus den Tabellen des Grafen⁷⁾ Sammelberichts (25 Jahre Forschungsarbeit auf dem Gebiete des Betonbaues) geht an allerlei Stellen deutlich hervor,

daß die 5. Grundbedingung des *festen Zusammenschließens* bei Beton sehr schlecht erfüllt ist. Aus einer quantitativen Prüfung wird also vorläufig nichts, glücklicherweise erbringt aber eine der Grafschen Tabellen eine merkwürdige qualitative Bestätigung der Theorie.

Wie schon bemerkt, sind Mörtel und Quarz mehr oder weniger elastisch ähnlich, für beide liegt das Verhältnis K/G (oder g/κ) um 0,92 und bei Kiesbeton ist daher ein Maximum oder Minimum der Dehnungszahl geradezu unmöglich. Anders beim Kalksteinschotterbeton. Für Kalkstein liegt g/κ um 1,67, es gibt eine große Möglichkeit, daß $g' > g''$ und $\kappa' < \kappa''$ sein wird, und da ist die Möglichkeit, daß ein Maximum oder Minimum der Dehnungszahl auftritt, gegeben. Und diese Möglichkeit wird Wirklichkeit, wie aus Tab. 2, welche ich dem Grafschen Bericht entnommen habe, hervorgeht:

Tabelle 2
Dehnungszahlen des Kalksteinschotterbetons

Mischungsverhältnis	1 : 2 (Mörtel)	1 : 2 : 2	1 : 2 : 4
Spannungsstufe 0,1—100 kg/cm ²			
Alter 3 Monate . . .	$\frac{1}{2710}$	$\frac{1}{3328}$	$\frac{1}{3161}$
„ 2 Jahre . . .	$\frac{1}{2728}$	$\frac{1}{3319}$	$\frac{1}{3040}$
„ 4 $\frac{1}{2}$ Jahre . . .	$\frac{1}{2828}$	$\frac{1}{3099}$	$\frac{1}{2901}$
Spannungsstufe 0,1—200 kg/cm ²			
Alter 3 Monate . . .	$\frac{1}{2440}$	$\frac{1}{3026}$	$\frac{1}{2887}$
„ 2 Jahre . . .	$\frac{1}{2597}$	$\frac{1}{3126}$	$\frac{1}{3013}$
„ 4 $\frac{1}{2}$ Jahre . . .	$\frac{1}{2740}$	$\frac{1}{3158}$	$\frac{1}{2909}$

Die Verhältniszahlen beziehen sich auf die Volume Zement, Sand und Kalksteinschotter, es tritt also ein deutliches *Minimum* der *Dehnungszahl* bei einem bestimmten Gehalt der eingesprengten Substanz zutage. Einerseits wird durch unsere Theorie dieser merkwürdige Verlauf der Dehnungszahl (abweichend vom monotonen Verlauf bei Bims- und Ziegelbeton), wofür Graf keine Erklärung angibt, vollständig erklärt, andererseits wird durch die Grafschen Ergebnisse die Theorie bestätigt. Weitere Untersuchungen wären hier sehr erwünscht; sollte daraus hervorgehen, daß bei Kalkschotterbeton die Torsionszahl monoton zunimmt, die Kompressibilität monoton abnimmt mit steigendem Schottergehalt, so wäre das eine weitere qualitative Bestätigung der Theorie.

9. Zusammenfassung

1. Es wurden die Formeln (8) für die Elastizitätskonstanten eines Mischkörpers aus parallelen Lamellen abgeleitet, weiter die Formeln (15) und (22) für Kompressions- und Torsionsmodul eines

Aggregats aus isotropen kleinen Kugeln, zerstreut eingebettet in einer isotropen Grundsubstanz. Letztere Formeln sind der bekannten Lorentz-Lorenz-Formel dem Wesen nach analog, (22) auch der Form nach. Aus den erhaltenen Formeln folgen weitere Gleichungen für die Deformationszahlen.

2. Aus (8) bzw. (15) und (22) folgen die Gl. (25) und (26) bzw. (27) und (28) für die K - und G -Moduln der isotropen Mischkörper aus lauter Lamellen bzw. Kugeln zusammengesetzt, abhängig vom Mischungsverhältnis δ' . Die $G\delta'$ -, $K\delta'$ - und $E\delta'$ -Kurven weichen in ihrem Verlauf zum Teil von den früher⁶⁾ abgeleiteten Kurven für die DK. und Leitfähigkeit ab; die Unterschiede werden erklärt.

3. Für Körnergemische (Granittypus) liegen die Moduln zwischen den entsprechenden Moduln für Lamellen- und Kugelmischungen, letztere ergeben wahrscheinlich die beste Annäherung und sind kaum verwickelter als die viel größeren Annäherungsformeln (2), (3) und (4). Meine eignen früheren Annäherungsformeln (5) ergeben Modulwerte, die fast überall zwischen den Extremwerten liegen und sich den Moduln der ungeordneten Lamellenaggregate eng anschließen. Die logarithmische Mischungsformel (29) von Lichtenecker und die allgemeine Mischungsformel (31) von Lichtenecker und Rother (mit passenden k -Werten) stimmen für zwei durchgerechnete Mischkörper weit besser als (2)–(4), wenn auch ihre Moduln nur zum Teil zwischen den Extremwerten liegen; am besten stimmen die Torsionsmoduln.

4. Für *Kugelporphyre* (Einstreuungskörper mit eingesprengten Kugeln) gelten (34) und (37) für *Torsionszahl* und *Kompressibilität*, aus ihnen folgt die *Dehnungszahl* nach (23). Letztere (und sie allein) hat bei gewissen Porphyren für ein bestimmtes Mischungsverhältnis ein *Minimum*, wo also der Mischkörper eine kleinere Dehnungszahl als jede seiner Komponenten aufweist; dieses Minimum tritt in der Tat bei Kalksteinschotterbeton auf und bringt eine qualitative Bestätigung der Theorie. Quantitative Prüfungen werden möglich, wenn es gelingt, Beton zusammenzusetzen mit besserem Zusammenhang der Bestandteile.

Literaturverzeichnis

- 1) C. Bach u. O. Graf, Deutscher Ausschuß f. Eisenbeton, Heft 16, 1912.
- 2) W. Boas, Helv. Phys. Acta 8. S. 674. 1935.
- 3) D. A. G. Bruggeman, Dissertation Utrecht 1930.
- 4) D. A. G. Bruggeman, Ztschr. f. Phys. 92. S. 561. 1934.
- 5) D. A. G. Bruggeman, Ann. d. Phys. [5] 24. S. 636. 1935.
- 6) D. A. G. Bruggeman, Phys. Ztschr. 37. S. 906. 1936.

7) O. Graf, Forschungsarb. auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 227. 1920.

8) O. Graf, Forschungsarb. auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 258. 1922.

9) A. Huber u. E. Schmid, *Helv. Phys. Acta* 7. S. 620. 1934.

10) K. Lichtenecker, *Phys. Ztschr.* 25. S. 69, 193, 225. 1924.

11) K. Lichtenecker u. Rother, *Phys. Ztschr.* 32. S. 255. 1931.

12) H. A. Lorentz, *Wied. Ann.* 9. S. 641. 1880.

13) L. Lorenz, *Wied. Ann.* 11. S. 70. 1880.

14) A. E. H. Love, *The mathematical Theory of Elasticity*, 4. ed. 1927.

15) J. W. Rayleigh, *Phil. Mag.* [5] 34. S. 481. 1892.

16) A. Reusz, *Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.* 9. S. 49. 1929.

17) W. Voigt, *Wied. Ann.* 42. S. 537. 1891; 44. S. 168. 1891.

18) W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik*. Nachdruck 1928.

Wassenaar (Holland), 10. März 1937.

(Eingegangen am 14. März 1937)

**Über die Abhängigkeit der Entropievermehrung
quasistadiabatischer Arbeitsprozesse von der Temperatur
und von der Dehnungsgeschwindigkeit**

Von M. Paul

I.

In der Thermodynamik werden die Gasprozesse vorwiegend quasistatisch betrachtet. Man kann jedoch in der Thermodynamik solche Prozesse bekanntlich auch dynamisch behandeln, ohne daß von diesem Gesichtspunkte aus schnell ablaufende Vorgänge notwendig irreversibel sein müßten. Es sei p der Druck, T die absolute Temperatur, v das spezifische Volumen und R die spezifische Gaskonstante; ferner bezeichne c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen und c_p die bei konstantem Druck. Hat der frei bewegliche Kolben eines ein Gas von der Gewichtseinheit abschließenden Zylinders die Masse m , und ist seine zur Bewegungsrichtung senkrechte Stoßfläche gleich der Flächeneinheit, so ist

$$(1) \quad m \frac{d^2 v}{dt^2} = p,$$

woraus unter der Annahme, daß kein Wärmeaustausch des Gases mit der Umgebung und keine Reibung auftritt, mit

$$c_v (T_0 - T) = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{dv}{dt} \right)^2$$

die Differentialgleichung¹⁾

$$(2) \quad \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{R}{2c_v \cdot v} \cdot \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 - \frac{R T_0}{m v} = 0$$

und mit $\frac{dv}{dt} = w$, $\frac{d^2 v}{dt^2} = w \cdot \frac{dw}{dv}$ die integrierbare Bernouillische Gleichung

$$(3) \quad \frac{dw}{dv} + \frac{R}{2c_v \cdot v} \cdot w - \frac{R T_0}{m \cdot v} \cdot w^{-1} = 0$$

1) Aus $T = T_0 - \frac{m}{2c_v} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2$ folgt $p = \frac{R T_0}{v} - \frac{R \cdot m}{2c_v \cdot v} \cdot \left(\frac{dv}{dt} \right)^2$.
12*

folgt. Hieraus ergibt sich dann

$$(4) \quad T = T_0 \cdot \left(\frac{v_0}{v} \right)^{R/c_v}$$

als Bedingungsgleichung für eine reversible adiabatische Dehnung, wie sie auch aus der quasistatischen Behandlung eines adiabatischen Prozesses hervorgeht.

Anders liegen die Bedingungen bei einer Betrachtung der Gasprozesse vom Standpunkte der kinetischen Theorie der Wärme aus. Die quasistatische Behandlung führt natürlich auch hier zu den gleichen Ergebnissen wie die Thermodynamik. Dagegen geht aus der molekularkinetischen Behandlung von Gasprozessen von endlicher Ablaufzeit hervor, daß sie infolge der molekularen Struktur der Materie notwendig irreversibel¹⁾ sein müssen, auch wenn sie reibungslos verlaufen.

Es soll hier gezeigt werden, daß die durch die molekulare Struktur bedingten Arbeitsverluste schnell ablaufender Gasprozesse gegenüber dem quasistatischen Fall recht beträchtlich werden können. Bisher wurde dieses Problem der Arbeitsverluste schnell bewegter Prozesse nur andeutungsweise²⁾ und in einer wenig durchsichtigen Form behandelt. In der inneren Ballistik, in der diese Abweichung vom quasistatischen Zustandsverlauf besonders stark hervortreten muß, ist der molekularen Struktur der Gase noch nicht Rechnung getragen worden³⁾.

II.

Die Frage nach der Größe der Arbeitsverluste schnell bewegter Gasprozesse legt von vornherein einen bestimmten Weg nahe, auf dem die Untersuchungen zweckmäßig zu führen sind. Wir beschränken uns hierbei auf solche Vorgänge, bei denen kein Wärmeaustausch zwischen Gas und dessen Umgebung stattfindet. Wir wollen solche Gasprozesse, die ohne Wärmeaustausch und in endlicher Zeit ablaufen, quasiadiabatische Prozesse nennen. Sie weichen von den thermodynamischen Adiabaten dadurch ab, daß die Entropie in ihnen auch bei völlig reibungslosem Ablauf zunimmt.

1) Da hier nur tatsächliche Arbeitsprozesse betrachtet werden, so gelten diese Betrachtungen nicht für Vorgänge wie die Schallwellen, die trotz zeitlich schnellen Ablaufs reversibel sind.

2) Vgl. K. F. Herzfeld, Müller-Pouillets, Lehrbuch der Physik III, 2. Hälfte, 11. Aufl. (1925), S. 20.

3) Vgl. Theodor Vahlen, Ballistik, Berlin und Leipzig 1922, Kap. 15, und C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik, 2. Bd., Berlin 1926, sowie Erg.-Bd. Berlin 1936.

In einem quasiadiabatischen Prozeß wird gegenüber der äußeren Arbeit $\int_1^2 p \, dv$ einer thermodynamischen Adiabate nur noch eine verringerte Arbeit

$$(5) \quad \int_1^2 p' \, dv = - \int_1^2 dU$$

geleistet, wenn U^1) die innere Energie der Gewichtseinheit darstellt. Die mittleren Zustände, die das Gas in einem quasiadiabatischen Prozeß durchläuft, können deshalb nicht mehr denen einer thermodynamischen Adiabate entsprechen. Vielmehr muß sich der Gaszustand während des Arbeitsprozesses in einer solchen Weise ändern, als ob dem Gase fortlaufend eine Wärmemenge

$$(6) \quad dQ = (p - p') \, dv$$

von außen zugeführt würde. Im unendlich kleinen Intervall kann der der Gl. (6) entsprechende Zustandswechsel stets polytropisch aufgefaßt werden. Der jeweilige Exponent n der Polytropen ist dann bestimmt durch

$$(7) \quad n = 1 + \frac{R}{c_v - (p - p') \cdot \frac{dv}{dT}}.$$

Nehmen wir an, daß der Übergang auch im Endlichen nach einer Polytropen erfolgt, so ist die von einem vollkommenen Gase bei einer quasiadiabatischen Dehnung geleistete Arbeit gegeben durch:

$$(5a) \quad \int_1^2 p' \, dv = - \int_1^2 dU = c_v T_1 \left\{ 1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} \right\}.$$

Die Entropie des Gases hat hierbei den Zuwachs:

$$(8) \quad \int_1^2 ds = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{p - p'}{T} \, dv$$

erfahren.

Diese Betrachtungen zeigen, daß wir den Arbeitsverlust quasiadiabatischer Prozesse bestimmen können, wenn wir in der Lage sind, den Exponenten n der Polytropen anzugeben, nach der sich der Zustand des arbeitenden Gases jeweilig ändert. Für jeden be-

1) Der Wärmehalt der Gewichtseinheit wird hier mit U bezeichnet, weil über u später anderweitig verfügt wird.

liebigen Zustand eines idealen Gases gilt, wie sich leicht zeigen läßt, die Beziehung:

$$(9) \quad \frac{U + p v}{U} = 1 + p \cdot \frac{v}{U} = \frac{c_p}{c_v} = \alpha.$$

In einer thermodynamischen Adiabate ist $dU + p dv = 0$, woraus $p = -\frac{dU}{dv}$ folgt. Hiermit liefert (9):

$$(10) \quad \alpha = 1 - \frac{v}{U} \cdot \frac{dU}{dv}$$

oder mit $\frac{dv}{dt} = w$:

$$(10a) \quad \alpha = 1 - \frac{v}{U \cdot w} \cdot \frac{dU}{dt}.$$

Wenn dU/dt von der Dehnungsgeschwindigkeit abhängt, so kann für in endlicher Zeit ablaufende Prozesse die linke Seite von (10a) nicht mehr den Quotienten der beiden spezifischen Wärmen darstellen. Um dies formal zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir:

$$(11) \quad k_w = 1 - \frac{v}{U \cdot w} \cdot \frac{dU}{dt}.$$

Dann ist im Grenzfall $\lim_{w \rightarrow 0} k_w = \frac{c_p}{c_v}$. Da aus (10):

$$U \cdot v^{k_w - 1} = \text{const.}$$

folgt, so stellt demnach k_w den Exponenten der Polytropen dar, nach der sich der Gaszustand in einem quasiadiabatischen Prozeß von der Dehnungsgeschwindigkeit w ändert. Den jeweiligen Wert des Exponenten k_w können wir aus (11) nicht ohne weiteres angeben. Hierzu ist es erforderlich, die Größe dU/dt mittels der kinetischen Theorie der Gase in eine geeignete Form zu bringen.

III.

Ist N die Anzahl der Molekeln der Volumeinheit des Gases und u ihre Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu dem zunächst ruhend gedachten Kolben unseres das Gas einschließenden Zylinders, so trifft auf dessen Flächeneinheit in der Zeiteinheit die Molekülzahl:

$$\frac{N}{c} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_0^\infty u e^{-\frac{3}{2} \frac{u^2}{c^2}} \cdot du = \frac{N}{\sqrt{6\pi}} \cdot c,$$

wenn c die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat angibt. Die Energie der nach dem Stoß auf die Kolbenwand zurückfahrenden Molekeln bleibt hierbei unverändert.

Der Kolben erfahre jetzt einen Impuls, der ihm (im Sinne einer Expansion des Gases) eine Geschwindigkeit w erteilt. Es können nur noch diejenigen Molekeln die innere Kolbenwand erreichen, deren Geschwindigkeit größer als w ist. Die Anzahl dieser befähigten Molekeln in der Zeiteinheit ist:

$$(12) \quad \frac{N}{c} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \int_w^{\infty} (u - w) \cdot e^{-\frac{3}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2}} \cdot du.$$

Die Geschwindigkeit der zurückfahrenden Molekeln hat dann nur noch die Größe $2w - u$. Der Energieinhalt der einzelnen Molekel hat sich demnach um den Betrag

$$\frac{m}{2} \{ u^2 - (2w - u)^2 \} = 2mw \cdot (u - w)$$

verringert entsprechend ihrem Anteil an der Vortriebsarbeit des Kolbens. Der gesamte Energieverlust der befähigten Molekeln und damit die Änderung der inneren Energie des Gases ist für die Zeiteinheit:

$$(13) \quad - \frac{dU}{dt} = \frac{N}{c} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot 2mw \int_w^{\infty} (u - w)^2 \cdot e^{-\frac{3}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2}} \cdot du.$$

Wir setzen:

$$\frac{3}{2} \left(\frac{u}{c} \right)^2 = x^2,$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{w}{c} \right)^2 = h^2$$

und erhalten:

$$(14) \quad \begin{cases} - \frac{dU}{dt} = - \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cdot Nmcw^2 \cdot e^{-h^2} \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot Nmw \left\{ \frac{1}{3} c^2 + w^2 \right\} \int_h^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx. \end{cases}$$

Das Integral dieser Gleichung kann nach den Tabellen von Kramp ausgewertet werden.

Bezeichnet n die Gesamtzahl aller Gasmolekeln, so ist $U = \frac{1}{2} nmc^2$.

Ferner ist das jeweilige Volumen $v = \frac{n}{N}$. Hiermit liefert Gl. (11) in Verbindung mit (13):

$$k_w = 1 + \frac{4}{c^2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_w^{\infty} (u - w)^2 \cdot e^{-\frac{3}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2}} \cdot du$$

bzw. mit (14):

$$k_w = 1 - 2 \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cdot \frac{w}{c} \cdot e^{-h^2} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{w^2}{c^2} \right\} \int_h^\infty e^{-x^2} dx.$$

Wir setzen voraus, daß die Dehnungsgeschwindigkeit w des Gases klein gegenüber der mittleren Molekulargeschwindigkeit ist. Infolgedessen sind wir berechtigt, in Gl. (14) nur Glieder erster Ordnung zu berücksichtigen. Wir erhalten für einatomige Gase:

$$k_w = \frac{5}{3} - 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \right\} \cdot \frac{w}{c} + 2 \left(\frac{w}{c} \right)^2 - \sqrt{6} \cdot \left(\frac{w}{c} \right)^3$$

oder bei zahlenmäßiger Zusammenfassung der Koeffizienten:

$$(15) \quad k_w = 1,6667 - 1,7378 \frac{w}{c} + 2 \left(\frac{w}{c} \right)^2 - 2,4495 \left(\frac{w}{c} \right)^3.$$

Bei dieser Ableitung wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß das Maxwellsche Verteilungsgesetz auch für expandierende Gase noch gültig bleibt. Dies dürfte bei langsamer Dehnung sehr angenähert zutreffen. Bei einem stürmischen Verlauf können wir bekanntlich folgendes annehmen: Die translatorische Energie der Molekeln ist bei einem ruhenden Gase gleichmäßig über die drei zueinander senkrechten Koordinatenrichtungen verteilt. Die Vortriebsarbeit des Kolbens kann unmittelbar nur von der zu seiner Stoßfläche senkrechten Energiekomponente des Gases geleistet werden, die deshalb zuerst verarmt. Infolge dieser Verarmung fließt ein Energiestrom aus den beiden zur Dehnung senkrechten Koordinatenrichtungen in die zur Kolbenfläche senkrechte Energiekomponente, der der Verarmung entgegenwirkt. Der Energieinhalt des Gases aus den in die Dehnungsachse fallenden Geschwindigkeitskomponenten seiner Molekeln muß deshalb stets um einen bestimmten Betrag, der von der Dehnungsgeschwindigkeit abhängt, kleiner sein als der Energieinhalt der beiden hierzu senkrechten Koordinatenachsen. Ferner werden sich in Anbetracht der mit wachsender Dehnungsgeschwindigkeit immer unvollkommener werdenden Durchmischung des Gases vorzugsweise die Molekeln in der Nähe der Kolbenwand anreichern, deren Energieinhalt durch Aufprall auf die Kolbenwand bereits verringert worden ist. Schließlich muß ein Druckgefälle in Richtung zur Kolbenwand bestehen, das mit der Expansionsgeschwindigkeit ansteigt, da der Druckausgleich im Gase nicht zeitlos ist. Aus diesen Betrachtungen folgt, daß die Arbeitsfähigkeit eines sich relativ schnell dehnenden Gases kleiner ist, als wie sie bei einer Maxwellschen Verteilung der Geschwin-

digkeiten sein würde. Die von uns entwickelten Formeln geben deshalb lediglich den oberen Grenzwert des möglichen Arbeitsgewinnes quasiadiabatischer Prozesse an. Ist die Kolbengeschwindigkeit unendlich groß, so liefert Gl. (14) $\lim_{w \rightarrow \infty} k_w = 1$. Das Gas kann hierbei keine Arbeit leisten, so daß die Dehnung isotherm erfolgt.

Die Abweichung quasiadiabatischer Prozesse von einer unendlich langsam bewegten Adiabate ist nach Gl. (15) eine Funktion des Quotienten w/c der Dehnungsgeschwindigkeit durch die mittlere Molekulargeschwindigkeit. Bei konstanter Dehnungsgeschwindigkeit ist sie sehr angenähert umgekehrt proportional zur jeweiligen mittleren Molekulargeschwindigkeit und somit zur Quadratwurzel aus der Temperatur. In Tab. 1 sind für $c = 500 \text{ m sec}^{-1}$ und verschiedene Dehnungsgeschwindigkeiten w die entsprechenden k_w angeführt. Die Werte w/c gestatten für die einzelnen k_w die Feststellung der zugehörigen Dehnungsgeschwindigkeit für beliebige andere mittlere Molekulargeschwindigkeiten bzw. Temperaturen. Um den Verlust quasiadiabatischer Prozesse an Arbeitsvermögen gegenüber der Adiabate beurteilen zu können, sind für die einzelnen Werte k_w die Temperaturen T_a berechnet worden, auf die das Gas nach einer Ausdehnung auf das doppelte Volumen bei einer Anfangstemperatur von 300°C sinkt. ΔT gibt an, um welchen Betrag die Endtemperatur des einzelnen quasiadiabatischen Prozesses über der entsprechenden Endtemperatur eines rein adiabatischen Prozesses liegt. Die letzte Spalte führt den maximal möglichen Wirkungsgrad η des einzelnen Prozesses in Prozenten des Arbeitsvermögens einer vollkommenen Adiabate an. Der Arbeitsverlust in endlicher Zeit ablaufender (reibungslöser) Prozesse kann somit ziemlich beträchtlich werden. Tab. 1 ist nur für einatomige Gase gültig.

Tabelle 1

w/c	$w \text{ (m sec}^{-1}\text{)}$ (für $c = 500 \text{ m sec}^{-1}$)	k_w	T_a in $^\circ \text{C}$	ΔT in $^\circ \text{C}$	η in %
0	0	1,6667	87,9	0,0	100,0
0,002	1	1,6629	88,9	1,0	99,5
0,004	2	1,6597	89,7	1,8	99,2
0,006	3	1,6564	90,5	2,6	98,8
0,008	4	1,6529	91,4	3,5	98,3
0,01	5	1,6495	92,3	4,4	98,0
0,02	10	1,6327	96,5	8,6	95,9
0,04	20	1,6002	105,0	17,1	91,9
0,06	30	1,5691	113,2	25,3	88,1
0,08	40	1,5392	121,3	33,4	84,3
0,1	50	1,5105	129,2	41,3	80,5

Wir hatten unsere Betrachtungen bisher einseitig auf expandierende Gasbewegungen beschränkt. Für eine quasiadiabatische Kompression wird

$$k_{-w} = 1 + \frac{4}{c^3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_{-w}^{\infty} (u+w)^2 \cdot e^{-\frac{3}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2}} \cdot du$$

und somit

$$(16) \quad k_{-w} = 1,6667 + 1,7378 \frac{w}{c} + 2 \cdot \left(\frac{w}{c}\right)^2 + 2,4495 \left(\frac{w}{c}\right)^3.$$

In Tab. 2 sind die entsprechenden k_{-w} bei einer mittleren Molekulargeschwindigkeit $c = 500 \text{ m sec}^{-1}$ für verschiedene Dehnungsgeschwindigkeiten angeführt. Ferner sind die Endtemperaturen T_b einer quasiadiabatischen Kompression auf halbes Volumen bei einer Anfangstemperatur von $158,2^\circ \text{C}$ mitgeteilt. ΔT gibt die Temperaturerhöhung über die entsprechende Endtemperatur einer Adiabate in $^\circ \text{C}$ und λ diese Temperaturerhöhung in Prozenten der adiabatischen Temperaturdifferenz zwischen Anfangs- und Endzustand bei einer solchen Kompression auf halbes Volumen an. Die aus der Formel hervorgehenden Werte haben nach den entsprechend umgekehrten früheren Überlegungen den Sinn eines unteren Grenzwertes, der nicht unterschritten werden kann.

Tabelle 2

w/c	$w \text{ (m sec}^{-1}\text{)}$ (für $c = 500 \text{ m sec}^{-1}$)	k_{-w}	T_b in $^\circ \text{C}$	ΔT in $^\circ \text{C}$	λ in %
0	0	1,6667	300,0	0	0
0,002	1	1,6705	301,5	1,5	0,7
0,004	2	1,6737	302,8	2,8	1,3
0,006	3	1,6772	304,2	4,2	2,0
0,008	4	1,6807	305,6	5,6	2,7
0,01	5	1,6843	307,0	7,0	3,3
0,02	10	1,7023	314,3	14,3	6,7
0,04	20	1,7396	329,7	29,7	14,0
0,06	30	1,7787	346,2	46,2	21,8
0,08	40	1,8198	364,1	64,1	30,2
0,1	50	1,8629	383,5	83,5	39,4

Während die Arbeitsausbeute eines quasiadiabatischen Dehnungsprozesses kleiner als die einer vollkommenen adiabatischen Expansion ist, erfordert die quasiadiabatische Verdichtung einen höheren Arbeitsaufwand als eine vollkommene adiabatische Kompression. Dementsprechend sinkt in einer quasiadiabatischen Dehnung die Temperatur langsamer, während sie in einer quasiadiabatischen Verdichtung schneller ansteigt, als im adiabatischen Prozeß. Für endliche Werte w ist stets k_{-w} größer, k_w kleiner als $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$.

Der Energieinhalt mehratomiger Gase kann durch

$$U = \frac{1}{2} n m c^2 \{1 + \alpha\}$$

dargestellt werden. Hierin ist α jeweils für einen größeren Zustandsbereich eine Konstante, die das Verhältnis der Summe an rotatorischer und oszillatorischer Energie zur translatorischen Energie angibt. Dann gilt für beliebige Gase

$$k_w = 1 + \frac{2}{3(1+\alpha)} - \frac{1}{1+\alpha} \left\{ 1,7378 \frac{w}{c} - 2 \left(\frac{w}{c} \right)^2 + 2,4495 \left(\frac{w}{c} \right)^3 \right\}$$

oder unter Einführung eines bestimmten, an sich beliebigen Quotienten $\kappa = \lim_{w=0} k_w = \lim_{w=0} k_{-w} = \frac{c_p}{c_v}$

$$k_w = \kappa - (\kappa - 1) \cdot \left\{ 2,6067 \left(\frac{w}{c} \right) - 3 \left(\frac{w}{c} \right)^2 + 3,6743 \left(\frac{w}{c} \right)^3 \right\}$$

und somit

$$k_{-w} = \kappa + (\kappa - 1) \cdot \left\{ 2,6067 \left(\frac{w}{c} \right) + 3 \left(\frac{w}{c} \right)^2 + 3,6743 \left(\frac{w}{c} \right)^3 \right\}.$$

Für einatomige Gase ist hierin $\alpha = 0$. Tab. 3 gibt die k_w für ein zweiatomiges Gas an, dessen adiabatischer Exponent $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,41$ ist. Die angeführten Werte w beziehen sich wieder auf eine mittlere Molekulargeschwindigkeit $c = 500 \text{ m sec}^{-1}$. Die T_a , ΔT und η gelten für eine Dehnung auf doppeltes Volumen, bei einer Anfangstemperatur von 300°C . Da k_w und somit w/c in diesen Dehnungsprozessen konstant sein sollen, so ändert sich hierin w mit der mittleren Molekulargeschwindigkeit c . Man kann aber auch, wie dies hier unterstellt wird, k_w als den Mittelwert für einen mit gleichbleibender oder beliebig veränderlicher Geschwindigkeit ablaufenden Prozeß auffassen. Für ein bestimmtes Gas sind natürlich die in dem Temperaturintervall der Dehnung auftretenden mittleren Molekulargeschwindigkeiten c maßgeblich, und nicht etwa die hier als ziemlich willkürliches Beispiel zugrunde gelegte mittlere Molekulargeschwindigkeit $c = 500 \text{ m sec}^{-1}$.

Tabelle 3

w/c	$w \text{ (m sec}^{-1}\text{)}$ (für $c = 500 \text{ m sec}^{-1}$)	k_w	T_a in $^\circ \text{C}$	ΔT in $^\circ \text{C}$	η in %
0	0	1,41	158,2	0	100,0
0,01	5	1,40	161,2	3,0	97,9
0,02	10	1,39	164,3	6,1	95,7
0,04	20	1,37	170,4	12,2	91,4
0,06	30	1,35	176,5	18,3	87,1
0,08	40	1,33	182,8	24,6	82,7
0,1	50	1,31	189,2	31,0	78,1

Tab. 4 führt für $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,41$ die Werte k_w bei quasiadiabatischen Kompressionsvorgängen an. Die T_b , ΔT und λ beziehen sich auf eine Kompression auf halbes Volumen, bei einer Anfangstemperatur von $158,2^\circ \text{C}$.

Tabelle 4

w/c	w (m sec ⁻¹) (für $c=500$ m sec ⁻¹)	k_w	T_b in $^\circ \text{C}$	ΔT in $^\circ \text{C}$	λ in $\%$
0	0	1,41	300,0	0	0
0,01	5	1,42	303,9	3,9	2,8
0,02	10	1,43	308,0	8,0	5,6
0,04	20	1,45	316,1	16,1	11,4
0,06	30	1,48	328,4	28,4	20,0
0,08	40	1,50	336,9	36,9	26,0
0,1	50	1,53	349,7	49,7	35,5

Infolge der Beschränkung von k_w bzw. k_{-w} auf zwei Dezimalen erscheinen die in den Tabellen 3 und 4 mitgeteilten, hiermit errechneten Temperaturreihen wenig ausgeglichen.

Die Abweichung quasiadiabatischer Prozesse von den Grenzwerten unserer Formeln dürfte bei mehratomigen Gasen größer als bei den einatomigen sein, weil der Übergang von rotatorischer und oszillatorischer Energie in translatorische Energie (bei Dehnungsprozessen) und umgekehrt (bei Kompressionsvorgängen) ebenfalls abhängig von der Zeit ist, worauf man bereits in anderem Zusammenhange hingewiesen hat. Bei einer sehr schnellen Dehnung wird deshalb das Verhältnis der rotatorischen und oszillatorischen Energie zur translatorischen Energie des Gases stets größer, bei einer sehr schnellen Kompression stets kleiner sein, als im Ruhezustande, wodurch im ersten Fall die Arbeitsfähigkeit des Gases noch mehr verschlechtert wird, während im zweiten Fall die Arbeitsaufnahme des Gases durch diesen Trägheitseffekt sich zusätzlich erhöht.

Jede quasiadiabatische Gasbewegung läßt sich durch eine Differentialgleichung darstellen, durch die auch die Werte k_w bzw. k_{-w} für alle Bewegungsphasen festgelegt sind, wenn sämtliche auf das Gas einwirkenden äußeren Kräfte bekannt sind. Eine solche allgemein gültige Differentialgleichung geht aus einer Verbindung der Gl. (1) des ersten Abschnittes mit der in Abschnitt III dargestellten Abhängigkeit des Gasdruckes von der jeweiligen Ablaufgeschwindigkeit des Gasprozesses hervor.

Berlin, Meteorologisches Institut der Universität.

(Eingegangen 14. März 1937)

***Elektronenerregung und Trägerreflexion
beim Auftreffen von K^+ -Trägern auf Metalle¹⁾***

Von Werner Veith

(Mit 13 Abbildungen)

1. Einleitung

Nachdem durch Lenard²⁾ die sekundären Kathodenstrahlen entdeckt und damit ein erster einfacher Fall der Elektronenauslösung aus Materie infolge einer primären Einwirkung aufgewiesen worden war, sind bald eine Reihe weiterer Möglichkeiten von Elektronenauslösung bekannt geworden. Danach mußte die für die Ergründung von Atomvorgängen wichtige Frage entstehen, wie weit diesen verschiedenen Erscheinungsformen ein gemeinsamer Mechanismus zugrunde liegen könnte.

Die Beantwortung dieser Frage setzte die quantitative Kenntnis der Eigenschaften der erregten Elektronen, insbesondere deren Geschwindigkeit bzw. Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit von der erregenden Ursache voraus. Auf Grund solcher Kenntnis hat zuerst A. Becker³⁾ systematische vergleichende Untersuchungen zur gestellten Frage durchgeführt. Aus dem Vergleich der sekundären und der δ -Strahlung, der lichtelektrischen und glühelektrischen Wirkung ergaben sich bemerkenswerte Übereinstimmungen in den verschiedenen Erscheinungen.

Die entsprechenden Beobachtungen an molekularen Strahlen schienen aber dem damit gewonnenen einfachen Bilde nicht ohne weiteres sich einzuordnen. Die ersten orientierenden Beobachtungen über die Eigenschaften der von Kanalstrahlen an Metallen erregten Elektronen sprachen für eine Austrittsgeschwindigkeit derselben von kleinen Werten bis maximal 30 Volt.⁴⁾ Nach Baerwald⁵⁾ erfolgt mit

1) Dissertation der Naturwiss.-Mathem. Fakultät der Universität Heidelberg; eingereicht am 1. Dezember 1936.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. S. 149. 1902.

3) A. Becker, Ann. d. Phys. 58. S. 393. 1919; 60. S. 30. 1919; 75. S. 217. 1924; 78. S. 83, 228 u. 253. 1925; 81. S. 93. 1926.

4) Ch. Füchtbauer, Phys. Ztschr. 7. S. 153. 1906.

5) H. Baerwald, Ann. d. Phys. 41. S. 643. 1913; 60. S. 1. 1919.

abnehmender Geschwindigkeit der erregenden Strahlen eine Bevorzugung der langsameren Elektronen. Während er aber eine untere Grenze der Erregung von 20 Volt fand, schien diese nach anderen Messungen¹⁾ nicht sichergestellt. In diesen älteren Arbeiten fehlte noch die genügende Beobachtung des Einflusses der Natur sowohl der bestrahlten Substanz als der Strahlung selbst auf die Emission. Man mußte in dieser Hinsicht einerseits das bestrahlte Metall variieren²⁾ und eine Entgasung³⁾ erstreben, andererseits die Natur der erregenden Moleküle des Strahls verändern. Hierher gehören die Arbeiten von A. L. Klein⁴⁾, Oliphant⁵⁾ und Moon⁶⁾, sowie aus allerjüngster Zeit von M. Healea und E. L. Chaffee⁷⁾ und J. Koch⁸⁾. Wie weit deren Befunde für unsere Frage von Bedeutung sind, werden wir im Anschluß an die eigenen Beobachtungen näher betrachten.

Es sind schließlich die Untersuchungen von Hahn⁹⁾ und Schneider¹⁰⁾ hervorzuheben, die die Elektronenauslösung zum Unterschied von den vorerwähnten Arbeiten aus dünnen durchstrahlten Schichten verfolgten und ihre Ergebnisse mit Stoßüberlegungen theoretisch zu deuten versuchten, während nach Oliphants quantenmäßiger Auffassung die Trägerbildungsspannung einen wesentlichen Einfluß besitzen soll. Bei dem Versuch, die Gesamtheit dieser Untersuchungen zu einem einheitlichen Bild zu vereinigen, ergab sich die Notwendigkeit, neue, in allen Einzelheiten kritisch geleitete Beobachtungen hinzu zu nehmen¹¹⁾. Deren Aufgabe war es vor allem, durch eingehende und einwandfreie Verfolgung der Geschwindigkeitsverteilung der erregten Elektronen die früheren Angaben zu prüfen und für den Zweck der Zusammenfassung zu vervollständigen.

1) E. Badareu, Phys. Ztschr. 25. S. 137. 1924.

2) W. L. Cheney, Phys. Rev. 10. S. 325. 1917.

3) W. Jackson, Phys. Rev. 28. S. 524. 1926; 30. S. 473. 1927.

4) A. L. Klein, Phys. Rev. 26. S. 800. 1925.

5) M. E. Oliphant, Proc. Cambr. 24. S. 451. 1928; Proc. Roy. London 124. S. 228. 1929; 127. S. 373. 1930; M. L. E. Oliphant u. P. B. Moon, Proc. Roy. 127. S. 388. 30.

6) P. B. Moon, Proc. Cambr. 27. S. 570. 1931.

7) M. Healea u. E. L. Chaffee, Phys. Rev. 49. S. 925. 1936.

8) J. Koch, Ztschr. f. Phys. 100. S. 685. 1936.

9) J. Hahn, Ztschr. f. Phys. 14. S. 355. 1923.

10) G. Schneider, Ann. d. Phys. [5] 13. S. 357. 1931.

11) Insbesondere war die Notwendigkeit der Feldfreiheit des Erzeugungsraums der Elektronen und der Einfluß von Kontaktpotentialen nicht genügend beachtet worden.

Die bei diesen Versuchen sich geltend machende und bereits mehrfach festgestellte¹⁾ Nebenerscheinung der Reflexion der molekularen Strahlen an der bestrahlten Oberfläche wird gleichzeitig weiterverfolgt.

2. Versuchsanordnung

Das eigentliche Versuchsrohr ist das gleiche, wie es von A. Becker²⁾ für seine Versuche über Rückdiffusion, Reflexion und Sekundärstrahlung langsamer Kathodenstrahlen und später von H. W. Langenwalter³⁾ benutzt worden war. Es dient dazu, die eine erregte Substanz normal verlassende Strahlung — Rückkehrträger und Elektronen — auf ihre Geschwindigkeit zu untersuchen. Dies geschieht mit Hilfe der Lenard'schen Gegenfeldmethode mit Hinzunahme der von Becker angegebenen Modifikation, bei der die untersuchte Strahlung im völlig feldfreien Raum austritt und dann erst in den Bereich des analysierenden Gegenfeldes gelangt.

Die Versuchsanordnung ist in Abb. 1 beschrieben. Der Glühdraht *G* ist von dem Wehneltzylinder *W* umgeben, dessen Öffnung 2 mm weit ist und etwa 3 mm Abstand von der Öffnung von *B*₁ hat. Zwischen *W* und *B*₁ liegt das beschleunigende Primärfeld.

Der Strahl trifft also unter 70° auf die Metallschicht *S*, die von dem Wolframdraht *H* ausgeheizt werden kann. Von dort geht die Elektronenstrahlung aus und läuft im feldfreien Raum durch das Netz *N* in den Käfig *F*. Zwischen beiden wird die zur Geschwindigkeitsmessung erforderliche Gegenspannung angelegt. Alle Metallteile sind

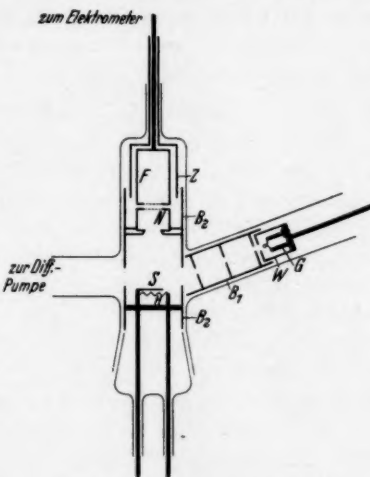


Abb. 1. Versuchsanordnung

1) E. Wagner, Ann. d. Phys. 41. S. 209. 1913; E. Horowitz, Phys. Ztschr. 33. S. 579. 1932; G. E. Read, Phys. Rev. 31. S. 155. 1928; R. Gurney, Phys. Rev. 32. S. 467. 1928; R. W. Sawyer, Phys. Rev. 35. II. S. 1092. 1930; K. S. Woodcock, Phys. Rev. 38. II. S. 1696. 1931; A. Longacre, Phys. Rev. 46. S. 407. 1934.

2) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 256. 1925.

3) H. W. Langenwalter, Ann. d. Phys. [5] 24. S. 273. 1935.

beruht, um Sekundärstrahlung und vor allem Reflexion weitgehend zu vermeiden. Das Rohr wird mit einer 2stufigen Diffusionspumpe leergepumpt. Die Schiffe sind mit Apiezon sehr sparsam gefettet, Dämpfe werden in einer Quecksilberfalle ausgefroren. Das Vakuum hält sich über Monate.

Trägerquelle. Als Trägerquelle wird nach Murawkin¹⁾ Geräteglas verwendet, welches durch eine 0,2 mm dicke Platinspirale, die das Glasstäbchen ringsum einschließt, geheizt wird. Der Trägerstrom tritt schon bei ganz schwacher Rotglut auf und bleibt 1—3 Monate lang bei fast täglicher Beanspruchung von mehreren Stunden einigermaßen konstant. Nach einer vor kurzem erschienenen Arbeit von H. Bondy und V. Vanicek²⁾ liefert eine solche Trägerquelle *K*-Träger, jedenfalls bei längerem Gebrauch derselben. Diese Träger erfahren in einem guten Vakuum, wie noch H. Bumann³⁾ besonders gezeigt hat, keine Umladung.

3. Meßweise

Die Kurven werden immer durch Zick-Zackmessung aufgenommen, d. h. jede Messung bei einem bestimmten Gegenfeld wird von einer sogenannten Nullmessung eingeschlossen. Diese Nullmessung geschieht in der Regel bei niedriger negativer Spannung (6—10 Volt), nämlich dort, wo die aufgefangene Menge nahe spannungsunabhängig wird; die hier gemessene Menge ist durchweg mit 100 bezeichnet. In den meisten Fällen werden die Kurven so aufgenommen, daß das Gegenfeld von hohen negativen Werten über kleine Felder zu hohen positiven und zurück variiert wird. Das erweist sich besonders bei gasbeladenen, unausgeheizten Schichten wegen deren Veränderlichkeit mit der Bestrahlung als unumgänglich. Unter negativem Feld ist dabei ein solches verstanden, welches für von *S* kommende Elektronen ein Gegenfeld und für reflektierte $+$ -Träger ein Zugfeld bedeutet, also positiver Pol an B_2 , negativer an dem geerdeten Schutzzyylinder *Z* und an der Elektrometerhülle.

4. Zur Deutung der Kurven

Mit der unter „Meßweise“ angeführten Methode erhält man Kurven derart, wie sie Abb. 2 und 3 darstellen. Als Abszisse ist die Spannung des Gegenfeldes in Volt eingetragen, Ordinate ist Elektrometerausschlag. Nimmt man an, daß zwischen *S* und B_2 (Abb. 1) kein Feld vorhanden ist, so stellt *OC* (Abb. 2) die algebraische

1) H. Murawkin, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 353. 1931.

2) H. Bondy u. V. Vanicek, Ztschr. f. Phys. 101. S. 186. 1936.

3) H. Bumann, Ztschr. f. Phys. 101. S. 1. 1936.

Summe der reflektierten Träger und der gesamten Elektronen dar. In unseren Beispielen überwiegen danach die positiven Ladungen. Legt man ein negatives Gegenfeld an, so ändert sich die Menge der reflektierten $+$ -Träger nicht. Die Elektronen aber werden von dem Feld immer mehr zurückgehalten und die Kurve steigt, falls von letzteren überhaupt vorhanden waren. Sind keine Elektronen mehr vorhanden, die das Gegenfeld überwinden können (Abb. 2, B), so läuft die Kurve parallel zur Abszisse (A B). Die Gesamtmenge der reflektierten $+$ -Träger wird also durch r dargestellt, die der Elektronen durch e . Legt man positive Felder an, so gehen alle Elektronen weiter in den Auffänger, aber die Träger werden zurückgehalten. Können keine Träger mehr auf den Auffänger gelangen, so stellt der negative Ausschlag von der Abszisse abwärts bis zur Kurve, sofern diese auch eine Sättigung erreicht, die Menge der Elektronen dar. Diese müßte dann $= e$ sein; man kann auf diese Weise die Zuverlässigkeit der Messung und ihre Deutung prüfen. Sind keine Elektronen vorhanden, und nur reflektierte Träger, (was bei kleiner erregender Strahlgeschwindigkeit möglich ist), so hat die Kurve die Gestalt von Abb. 3a. Sie bleibt also im ganzen Gegenfeld horizontal.

Kontaktpotential. Nach obiger Deutung des Kurvenverlaufs hätten die Elektronen im betrachteten Fall (Abb. 2) Geschwindigkeiten bis zu 9 Volt, die Träger bis über 18 Volt. Dabei wäre vorausgesetzt, daß dem Nullpunkt der Abszisse tatsächlich der Nullwert der Spannung entspräche. Nun fällt aber auf, daß die Kurven von C nach D fast waagrecht laufen, daß also Träger von 2 Volt Geschwindigkeit vorhanden wären, solche von einem Volt dagegen nicht. Das erschien reichlich unwahrscheinlich und deutet offenbar das Nicht-

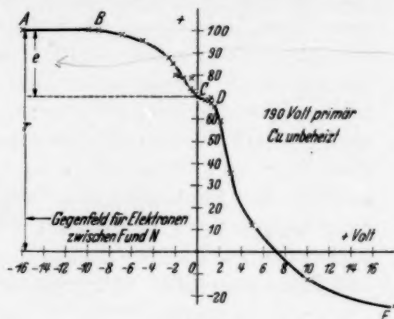


Abb. 2.

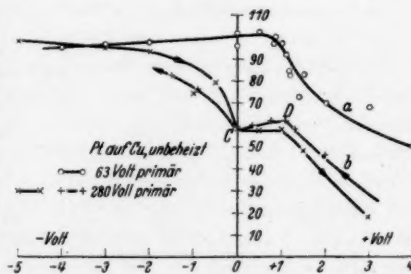


Abb. 3.

Abb. 2 u. 3: Gegenspannungskurven an nicht beheizten Schichten

zutreffen unserer Voraussetzung an. Man muß hier an Kontaktpotentialdifferenzen denken. Wenn S und B_2 miteinander verbunden sind, so sollte also zwischen der Oberfläche von S und B_2 ein solches Feld bestehen, daß die Träger, die von sich aus kaum beschleunigt sind, mit Geschwindigkeiten bis zu 1,5 Volt auf den Auffänger auftreten: das Potential von S wäre also um 1—1,5 Volt höher als das von B_2 . Vergleicht man diesen Wert mit den Werten, die aus einer Zusammenstellung von E. Lange¹⁾ entnommen werden können, so müßte nach Größe und Richtung des Kontaktpotentials auf eine Kalium- oder Natriumschicht bei S geschlossen werden. — Ein solches Kontaktpotential würde aber nicht nur Träger beschleunigen, sondern auch Elektronen verzögern, so daß die gemessene Kurve nicht nur nach links um etwa 1 Volt verschoben werden müßte, sondern das Kontaktpotential würde den Kurvenverlauf im Sinne einer vollständigen Auslöschung der Geschwindigkeitsverteilung von Elektronen von 0—1,5 Volt fälschen. Es mußte also versucht werden, das Kontaktpotential zu bestimmen, wobei es sich nicht nur um Spannungsdifferenzen zwischen S und N , sondern auch zwischen N und F handelt. Die letztere kann leicht durch die Elektrometeraufladung bestimmt werden, welche auftritt, wenn der betreffende Raum nach Herstellung eines geringen Gasdrucks künstlich, etwa mittels eines α -Strahlenpräparats, leitend gemacht wird. Es findet sich dabei ein Wert von + 0,13 Volt (N gegen F), der also nur von geringem Einfluß auf die Messungen ist. Die etwaige Spannungsdifferenz zwischen S und N oder S und F kann auf diese Weise wegen des Vorhandenseins mehrerer Metallteile im betreffenden Raum nicht sicher festgestellt werden. Aber auch die anderen üblichen Methoden²⁾ sind schwer anwendbar. Der Versuch, die Kontaktpotentialdifferenz durch eine Messung der Geschwindigkeit reflektierter Elektronen beim Auftreffen von Elektronen aus einem Wolframdraht auf S zu bestimmen, lieferte naturgemäß nur die Kontaktpotentialdifferenz zwischen der Schutzhülle und dem Wolframdraht, ohne etwas über das auf dem Strahlweg liegende Kupferplättchen auszusagen. Um diese wichtige Frage nach dem Kontaktpotential trotzdem zu klären, werden folgende Messungen gemacht: Das Kupferplättchen wird mit einer Platinfolie bedeckt und die Kurven der Abb. 3 damit aufgenommen. Sie haben denselben Charakter wie die Kurve in Abb. 2;

1) Handb. d. Experimentalphys. Bd. XII. 2. Teil, S. 317.

2) Eine Zusammenstellung dieser Methoden findet sich beispielsweise bei H. Gericke, Phys. Ztschr. 9, S. 327. 1936. Eine seit langem von A. Becker angegebene Meßweise, a. a. O., Ann. d. Phys. 78, sucht man hier aber leider vergeblich.

denn es ist keine Lagenveränderung der markanten Stellen *C* und *D* eingetreten. Um nun das durch das evtl. Kontaktpotential hervorgerufene Feld aufzuheben, wurde *B*₂ mit dem positiven und *S* mit dem negativen Pol eines Akkumulators verbunden und die Gegenfeldkurve erneut aufgenommen, was Abb. 4 ergab. Wäre keine Kontaktpotentialdifferenz vorhanden gewesen, so hätte man eine Kurve vom Typ der gestrichelt gezeichneten willkürlichen Kurve (Abb. 4b) erhalten müssen; denn alle Elektronen wären um 2 Volt

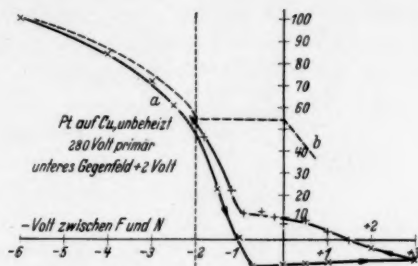


Abb. 4. Gegenspannungskurve bei nicht feldfreiem Raum

beschleunigt gewesen. Die Kurve *a* — die Pfeile geben die Reihenfolge der Aufnahme der Meßpunkte, und die aufgetretene Schleife zeigt an, daß an den betreffenden Stellen keine genaue Reproduktion der Werte vorhanden ist — muß dagegen so gedeutet werden, daß trotz einer Beschleunigung der Sekundärelektronen um 2 Volt die langsamsten nur 1 Volt Geschwindigkeit haben: Damit ist das Vorhandensein einer Kontaktpotentialdifferenz von rund 1 Volt nachgewiesen. Die Tatsache, daß das ungeheizte Platinband dieselbe Kontaktpotentialdifferenz hat wie das ausgeheizte Kupfer, und daß die Größe und das Vorzeichen des gefundenen Kontaktpotentials ungefähr mit der des Kaliums übereinstimmt, weist auf das Entstehen einer Kaliumschicht hin. Außerdem ist damit auch bewiesen, wie es Abb. 4 im Vergleich mit Abb. 3b zeigt, die bei gleicher Primärspannung aufgenommen wurde, daß wie oben behauptet, ein wichtiger Teil der Kurve durch das Kontaktpotential ausgelöscht wird. So gibt auch der Schnittpunkt der Kurve in Abb. 4 mit der Ordinatenachse eine mehr als doppelt so große Elektronenmenge an als in Abb. 3a. Bei ausgeheizter Platinschicht [vgl. Abb. 8b, 9¹⁾] hat das

1) Der Knick bei -1 bis $-1,5$ Volt erscheint in dem Kurvenbild infolge der Streuung der Meßpunkte willkürlich. Er wird aber durch die Gesamtheit vieler ähnlicher Messungen gerechtfertigt.

Kontaktpotential das umgekehrte Vorzeichen und liegt in der Größe von 1 Volt¹⁾, und bei ausgeheiztem Aluminium ist keine deutliche Kontaktpotentialdifferenz zu beobachten.

5. Die Notwendigkeit des feldfreien Raums

Wie schon eingangs erwähnt wurde, scheinen die meisten Beobachter der Erscheinung der Elektronenerregung der vollständigen Feldfreiheit des Entstehungsraums nicht die notwendige Beachtung zu schenken. Auf die Wichtigkeit dieser Tatsache hat A. Becker²⁾ hingewiesen. Da beim Auftreffen von Trägerstrahlen sowohl Elektronen als auch Träger sehr kleiner Geschwindigkeit vorkommen, muß schon ein sehr kleines Feld nicht nur die Intensitäten verändern, sondern es wirkt sich auch in einer vollständigen Verzerrung des Kurvenverlaufs durch Konzentration der verschiedenen Strahlen aus.

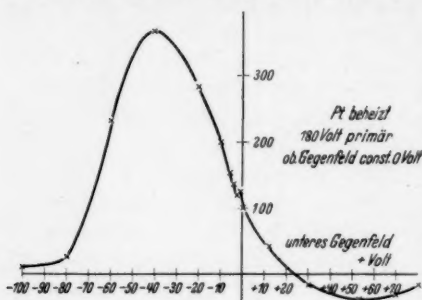


Abb. 5.

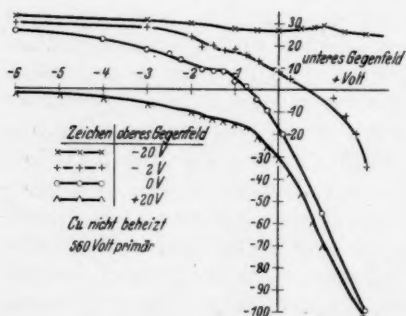


Abb. 6.

Abb. 5 u. 6: Variation der Spannung zwischen S und N

Strahl an. Werden solche Messungen bei verschiedenen, aber während einer Kurvenaufnahme konstantem Feld zwischen N und F ausgeführt, so erhält man, wie Abb. 6 zeigt³⁾, verschiedene Kurven. Sie lassen klar erkennen, daß das elektrische Feld sich vor allen Dingen bei langsamen Elektronen bemerkbar macht, während bei den wesentlich

Freiheit des Entstehungsraums nicht die notwendige Beachtung zu schenken. Auf die Wichtigkeit dieser Tatsache hat A. Becker²⁾ hingewiesen. Da beim Auftreffen von Trägerstrahlen sowohl Elektronen als auch Träger sehr kleiner Geschwindigkeit vorkommen, muß schon ein sehr kleines Feld nicht nur die Intensitäten verändern, sondern es wirkt sich auch in einer vollständigen Verzerrung des Kurvenverlaufs durch Konzentration der verschiedenen Strahlen aus. Eine solche gestörte Kurve ist in Abb. 5 dargestellt. Sie ist dadurch erhalten, daß man das Meßfeld zwischen S und N und nicht zwischen N und F anlegt. Der auf das Maximum folgende Abfall nach größeren Gegenspannungen deutet einen Feldeinfluß auf den erregenden

1) Vgl. Handb. d. Experimentalphys. XII, 2. Teil, S. 317.

2) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 100. 1925.

3) Sie enthält nur den Verlauf in der Nähe des Abszissennullpunktes.

steiferen Trägerstrahlen (oberes Gegenfeld — 20 Volt) dieser Einfluß im betrachteten Bereich nur klein ist. Erst nach Kenntnis des Feldeinflusses können aus einer Kurve (wie etwa Abb. 9) derart weitgehende Schlüsse gezogen werden, wie das später geschieht.

6. Die Bedeutung des Ausheizens

Nachdem sich bei den ersten Beobachtungen an dicken Kupferschichten gezeigt hat, daß der Gasgehalt der Schichten die Erscheinung erheblich beeinflussen kann, werden die eingehenderen Messungen an leicht ausheizbaren dünnsten Platinschichten durchgeführt. Dieselben sind Zerstäubungsschichten auf einer dünnen Quarzplatte.

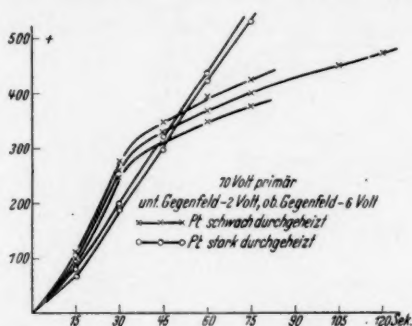


Abb. 7. Zeitlicher Gang der Trägerreflexion bei verschiedener Beheizung

Da durch deren Bestrahlung eine allmähliche Verletzung der Schicht auftritt¹⁾, darf deren Dicke für längere Versuchsreihen nicht zu gering gewählt werden. Die Ausheizung durch den aus Abb. 1 ersichtlichen Glühdraht *H* kann während der Messung erfolgen, falls entweder so wenig geglüht wird, daß keine Eigenemission des Heizdrahtes stattfindet, oder falls man diese durch ein geeignetes Gegenfeld unwirksam macht. Andererseits kann die Schicht vorgeheizt und danach erst der Messung unterworfen werden.

Wie die Erscheinungen dann bei Bestrahlung einer solchen Schicht im einzelnen verlaufen, möge aus Abb. 7 und 8 ersehen werden. Man beobachtet, wie schon gezeigt, sowohl eine Trägerreflexion als eine Elektronenemission. Man kann beides gemeinsam

1) Man beobachtet dies deutlich bei allen Strahlengeschwindigkeiten über 280 Volt.

(vgl. Abb. 2) und bei geeigneter Wahl der Meßfelder, bzw. erregender Geschwindigkeiten, getrennt verfolgen.

Wie die Trägerreflexion durch die Ausheizung beeinflußt wird, zeigt Abb. 7. Es wird hier der zeitliche Gang des Elektrometerausschlages bei Bestrahlung beobachtet, wenn die Pt-Schicht das eine Mal dauernd stark geheizt ist (○○○-Kurve), das andere Mal nach dieser Heizung nur noch schwach weiter erwärmt bleibt. Während im ersten Fall nahe Proportionalität des Elektrometerganges mit der Zeit erfolgt, wie bei konstanter Strahlintensität zu

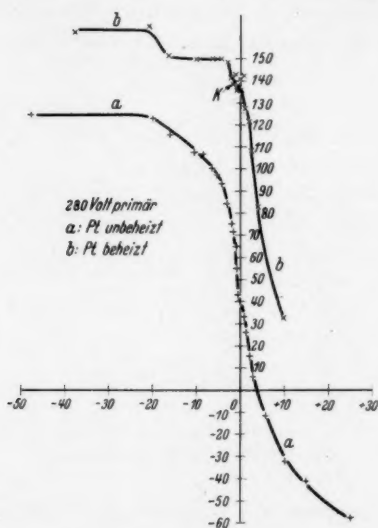


Abb. 8. Gegenspannungskurve mit und ohne Beheizung

erwarten, wird im anderen Fall eine Veränderung der Schicht angezeigt. Man muß aus der Verringerung der Reflexion der Alkali-träger auf deren teilweise Auflagerung auf der Platinoberfläche schließen, wie sie namentlich bei kalten Flächen aus mehreren anderen Anzeichen (vgl. Kap. Kontaktpotential) zu erkennen ist.

Wie die Elektronenemission sich mit der Ausheizung verändert, kann aus Abb. 8 ersehen werden. Die Meßkurve *a* entspricht einer unbeheizten Pt-Schicht, die Kurve *b* einer stark vorbeheizten und dann schwach nachbeheizten Schicht. Während bei der unbeheizten Schicht die Elektronengeschwindigkeiten zwischen 0 und 20 Volt (ohne Korrektion wegen des Kontaktpotentials) stetig vertreten sind,

fällt bei der beheizten Schicht nach Abb. 8b das Geschwindigkeitsgebiet von etwa 3—15 Volt völlig aus, wobei auch die Elektronenmenge im letzteren Fall stark abgenommen hat.

7. Der Elektronenaustritt

Bei allen Messungen mit beheizten Schichten treten Kurven auf von der Art, wie wir sie schon in Abb. 8b gesehen haben und wie sie auch in Abb. 9 und 11 dargestellt sind. Die als Abszisse aufgetragenen Meßspannungen sind unkorrigiert und daher noch um das Kontaktpotential von den tatsächlich wirksamen Werten verschieden. Für eine Analyse der Kurve ist, wie bereits gezeigt, zu beachten, daß der linke Kurvenast über die erregten Elektronen, der rechte über die rückkehrenden Träger aussagt.

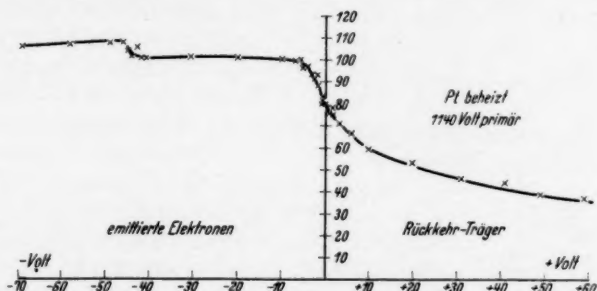


Abb. 9. Gegenspannungskurve an beheiztem Pt

Wir betrachten zunächst die Elektronenverteilung unter Verfolgung der Kurve in Abb. 9, die aus der Bestrahlung einer beheizten Pt-Schicht mit 1140 Voltstrahlen erhalten wird. Gehen wir von der Ordinatenachse aus, so zeigt die Kurve zunächst — nach einem kurzen waagrechten Teil, der dem Kontaktpotential des Platins gegen den Schutzzyylinder zuzuschreiben ist — einen anfänglich steilen Anstieg, der das Vorhandensein einer erheblichen Zahl von langsamen Elektronen andeutet. Es folgt dann eine durch den anschließenden horizontalen Teil angezeigte Geschwindigkeitslücke, die in ein verhältnismäßig eng begrenztes Gebiet schnellerer Elektronen übergeht. Aus dem weiterhin horizontalen Kurvenverlauf geht hervor, daß größere Geschwindigkeiten bis zu den erfaßten Höchstspannungen von 150 Volt nicht merklich vorhanden sind. Wenden wir uns nun dem Geschwindigkeitsmaximum näher zu und vergleichen wir diese Kurve (Abb. 9) mit der schon betrachteten Abb. 8a, die mit einer

erregenden Strahlung von 280 Volt erhalten wird, so fällt neben dem gemeinsamen Grundcharakter beider Kurven doch sofort auf, daß die Geschwindigkeitslücke hier bedeutend schmaler ist. Das beobachtete Geschwindigkeitsmaximum ist also mit veränderter Primärenergie an einen anderen Ort gerückt. Eine besondere Versuchsreihe, die diese Abhängigkeit der schnellsten erregten Elektronen von der erregenden Energie prüfen soll, ist in Abb. 10 zusammen-

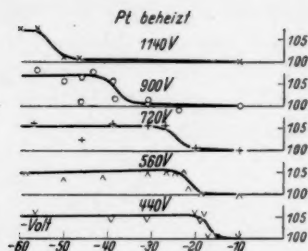


Abb. 10. Gegenspannungskurven bei verschiedenen Primärenergien

betrachteten Kurven eingezeichnet, der sich von -10 Volt nach höheren negativen Spannungen erstreckt. Das zu untersuchende Geschwindigkeitsintervall zeigt sich hierbei deutlich von der Primärenergie beeinflusst in dem Sinne, daß mit steigender Primärenergie auch die Energie der erregten Elektronen wächst, wobei die untersuchte Maximalgeschwindigkeit zwar nicht ganz einheitlich ist, aber doch immer nur einen verhältnismäßig schmalen Bereich einnimmt¹⁾.

Während die Primärenergie von 1140 Volt bis 440 Volt sinkt, nehmen die Maximalgeschwindigkeiten der Elektronen etwa von 53—18 Volt ab. Daß solche Elektronen auch noch bei geringeren Primärenergien auftreten, geht beispielsweise aus Abb. 8b hervor. Die Frage aber nach dem weiteren Gang der Maximalgeschwindigkeit und der Intensität dieser Gruppe bei Primärenergien unter 280 Volt kann leider wegen allgemeinen Intensitätsmangels bei diesen Energien nicht mit Sicherheit beantwortet werden²⁾. Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, daß bei beheizten Schichten, soweit überhaupt Elektronen sicher beobachtet wurden, immer auch beide Gruppen auftreten, während bei unbeheizten Schichten nur die untere Gruppe verbreitert erschien (vgl. Abb. 8).

1) Die vor allem bei der Kurve mit 900 Volt Primärenergie auftretende Streuung der Meßpunkte ist bei der im vorhergehenden Kapitel gezeigten empfindlichen Abhängigkeit dieses Kurventeils vom Grad der Entgasung erklärlich.

2) Die Gegenspannungskurven zur Ermittlung der Trägergeschwindigkeiten (Abb. 12 und 13) konnten nur unter übermäßiger Beanspruchung der Trägerquelle und daher nur über einen kurzen Zeitraum bei viel weniger Meßpunkten aufgenommen werden.

Das merkwürdige Auftreten dieser diskreten oberen Geschwindigkeitsgruppe an Platin legt die Frage nahe, wie weit hierfür das beschossene Metall verantwortlich ist. Deshalb werden einige Messungen mit einer Al-Folie von 0,001 mm Dicke, die über die Platinschicht gespannt wird, durchgeführt. Wie aus Abb. 11 zu ersehen ist, tritt auch hier die besprochene Gruppe auf; es entspricht aber einer Geschwindigkeit von 25 Volt bei Pt (Abb. 10) bei gleicher Primärenergie eine Geschwindigkeit von 50 Volt bei Al. Ein weiteres Wachsen der

Elektronengeschwindigkeit mit steigender Primärenergie kann auch beobachtet werden, genauere Werte können aber nicht angegeben werden, da die Kurven jetzt viel schlechter reproduzierbar werden, wahrscheinlich deshalb, weil die Al-Folie bei

weitem nicht so vollständig entgast werden kann, so daß sich in den Kurven kein markanter Anstieg bemerkbar macht.

Im Gegensatz zu dem Verhalten der schnelleren Elektronen zeigen sich die langsamen nicht wesentlich geschwindigkeitsabhängig. Übereinstimmend beginnt bei allen Messungen an Platin der Kurvenanstieg erst bei etwa $-1,5$ Volt, was, wie schon öfter erwähnt, auf das Vorhandensein einer Kontaktpotentialdifferenz zurückzuführen ist. Ebenso übereinstimmend wird der größte Teil des ersten Kurvenanstiegs durch Elektronen bis zu etwa 3 Volt Geschwindigkeit verursacht, da bei den meisten Kurven die erste Sättigung schon bei 4–5 Volt erreicht ist, was nach Korrektur durch die Kontaktpotentialdifferenz obigen Geschwindigkeitswert ergibt. Ein Einfluß der erregenden Energie ist insoweit vorhanden, als bei höheren Energiewerten ein späteres, langsames Umbiegen zur Geraden stattfindet (vgl. Abb. 9). Es sei an dieser Stelle ausdrücklich auf die Parallele zu dem Vorgang der Sekundärstrahlung von Kathodenstrahlen hingewiesen, da wir nämlich hier dieselben kleinen Elektronengeschwindigkeiten finden, wie sie dort von A. Becker¹⁾ beobachtet

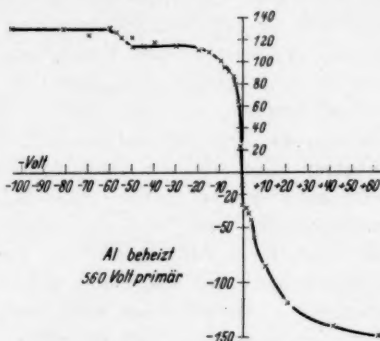


Abb. 11. Gegenspannungskurve bei Aluminium

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 270. 1925.

worden sind. Noch in einer anderen Hinsicht kann dieser Vergleich durchgeführt werden. Betrachtet man nämlich den Einfluß der Entgasung auf die Geschwindigkeitsverteilung, so zeigt z. B. Abb. 8, daß, obwohl ein quantitativer Vergleich der Elektronenmengen nicht möglich ist, doch deutlich ihre Abnahme bei fortschreitender Entgasung erkennbar ist, in der gleichen Weise wie es H. W. Langenwalter¹⁾ bei der Sekundärstrahlung beobachtet hat. Diese Tatsache kann aus einer ganzen Reihe von Messungen an Pt entnommen werden und scheint sich auch bei der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen an der Al-Folie (Abb. 11) etwas bemerkbar zu machen, da diese sich infolge ihrer Dicke wohl kaum so vollständig entgasen läßt wie die dünne Pt-Schicht. Dieselbe typische Verteilungskurve einer nicht entgasten Metallschicht tritt in besonders starkem Maße auch bei den Versuchen mit der massiven Kupferplatte auf und ist in Abb. 2 deutlich durch die stetige Krümmung des Kurvenbogens, der erst bei -9 Volt — trotz der geringen Primärenergie — zur Geraden wird, ausgedrückt. Dabei ist allerdings derjenige Kurventeil, der die oben erwähnte wahrscheinlichste Geschwindigkeit anzeigen sollte, durch das Kontaktpotential empfindlich gestört (vgl. Kapitel Kontaktpotential).

Über das Elektronenerregungsvermögen, d. h. über die Menge der Elektronen in Abhängigkeit von Primärenergie und Gasbelegung der Schicht, kann mit der benutzten Apparatur ebenso wenig etwas ausgesagt werden wie über das Reflexionsvermögen, da die Intensität der Primärstrahlen nicht gemessen werden konnte. Es ist daher auch keine genaue untere Grenze für die zur Elektronenbefreiung erforderliche Trägerenergie angebbar. Es kann aber immerhin bemerkt werden, daß in unseren Versuchen bei beheizter Schicht unter 100 Volt keine Elektronenbefreiung mehr nachweisbar ist, während bei unbeheizter Schicht Elektronen noch bis zu 50 Volt Primärenergie herab feststellbar sind.

8. Trägerreflexion

Aus den Kurventeilen, die positiven Abszissenwerten zugehören, muß sich natürlich auch etwas über die Geschwindigkeit der reflektierten Träger aussagen lassen, wenn auch die Kurven nur in wenigen Fällen bis zur Sättigung verfolgt werden konnten. Sie zeigen übereinstimmend, daß der größte Teil der Träger, dem Gebiet stärkster Kurvensteilheit entsprechend, Geschwindigkeiten bis zu 20 Volt hat,

1) H. W. Langenwalter, Ann. d. Phys. 24. S. 273. 1935.

wobei auch hier die ganz kleinen Geschwindigkeiten — die z. T. durch das Kontaktpotential verdeckt werden — am meisten vertreten sind. Es treten aber auch sehr viel schnellere Träger auf, wie das monotone Fallen aller Kurven beweist, besonders, wie zu erwarten, bei größeren Primärenergien. Ein Versuch, die größten auftretenden Geschwindigkeiten zu messen, mußte mit geringer Primärenergie unternommen werden. Das Resultat zeigen Abb. 12 und 13. Während

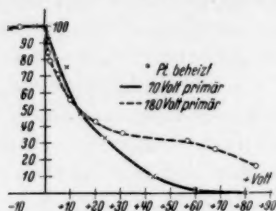


Abb. 12.

Trägerreflexion an Platin und Aluminium

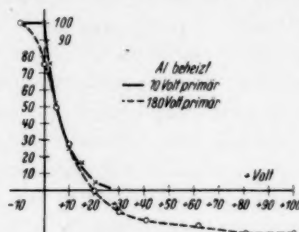


Abb. 13.

bei Pt (Abb. 12) in der Reflexion die primäre Geschwindigkeit erreicht werden kann — der Elektrometerrausschlag verschwindet erst bei einer Gegenspannung von gleicher Größe wie die Primärspannung — wird bei Al nur etwas mehr als $\frac{1}{3}$ der primären Geschwindigkeit erreicht: So wird (Abb. 13) beim Auftreffen von 70 Voltträgern auf Al die Abszissenachse schon bei etwa 30 Volt erreicht und bei 180 Voltträgern ist die Kurve bei einer Gegenspannung von 70—80 Volt bereits gesättigt.

Was die Trägermenge anbelangt, so kann zwar, wie schon erwähnt, für deren Bestimmung keine exakte Messung durchgeführt werden; jedoch konnte beim Beheizen der Schicht in allen Fällen eine beträchtliche Vergrößerung der Trägerintensität beobachtet werden. Der Vollständigkeit halber sei aber erwähnt, daß nach einer entsprechenden Änderung des Versuchsrohres eine wenn auch nur orientierende Messung unternommen werden konnte, die für die Intensität der Trägerreflexion in Abhängigkeit von der Primärenergie einen ähnlichen Kurvenverlauf mit demselben charakteristischen Knick ergab, wie ihn Oliphant¹⁾ zuerst fand.

9. Magnetische Ablenkung

Zur Prüfung des etwaigen Einwandes, daß die von uns beobachteten Erscheinungen teilweise durch Vorgänge an den von den

1) M. L. E. Oliphant, a. a. O., Proc. Cambr. 24. S. 451. 1928.

Strahlen getroffenen Netzen N und F beeinflusst sein könnten, wurde die Elektronengeschwindigkeit auch durch Anwendung magnetischer Felder zu ermitteln versucht. Es ergab sich dabei, daß die Deutung der elektrischen Messungen durchaus fehlerfrei ist.

10. Vergleich mit anderen Ergebnissen

Ein Vergleich der Ergebnisse der großen Zahl von Untersuchungen über die Elektronenerregung an Metallen durch positive Strahlen ist sehr erschwert durch die Unkenntnis des Grades der Entgasung der untersuchten Schicht. Es ist zwar experimentell mehrmals bestätigt, daß mit fortschreitender Entgasung in Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen die Intensität der erregten Elektronen fällt¹⁾ und die der reflektierten Träger steigt²⁾; jedoch zeigen die Messungen von Oliphant³⁾ wie auch durch andere Erfahrung erwiesen, daß eine vollständige Ausschaltung des Gaseinflusses durch Entgasung bei keinem Metall zu erreichen ist. Ein zweiter Einfluß, der die Deutung der Versuchsergebnisse erschwert, ist das Auftreten der Alkalischiicht bei nicht beheizten Folien⁴⁾; denn es läßt sich dann nicht entscheiden, wie weit die oben erwähnte Vergrößerung der Elektronenintensität auf eine, von lichtelektrischen Untersuchungen her bekannte, Verkleinerung der Austrittsarbeit durch Alkali-Metallbeläge oder darauf zurückzuführen ist, daß die Elektronen leichter aus Gas ausgelöst würden als aus Metallen.

Obwohl sich also aus diesen Gründen die verschiedenen Arbeiten nur in beschränktem Maße vergleichen lassen, so stimmen doch unsere Ergebnisse insofern mit anderen überein⁵⁾, als der Einfluß der Entgasung sich in der Richtung bemerkbar macht, daß das stetige Vorhandensein eines ganzen Geschwindigkeitsbandes von Elektronen bei kalter Schicht mit fortschreitender Entgasung teils sich in diskrete Geschwindigkeitsgruppen auflöst, teils, was für die kleinsten Geschwindigkeiten zutrifft, sich zu kleineren Geschwindigkeiten zusammenzieht. So zeigt sich bei Oliphant eine Gruppe von

1) M. R. Chaudhry, Proc. Cambr. 28. S. 349. 1931; T. J. Campan, Phys. Ztschr. 32. S. 593. 1931; M. E. Oliphant, a. a. O.; M. Healea u. E. L. Chaffee, Phys. Rev. 49. S. 925. 1936; J. Koch, Ztschr. f. Phys. 100. S. 685. 1936.

2) R. Gurney, Phys. Rev. 32. S. 467. 1928; J. Koch, a. a. O.

3) M. L. E. Oliphant, Proc. Cambr. 24. S. 451. 1928.

4) J. Koch, a. a. O.; P. B. Moon, a. a. O.; M. L. Oliphant, a. a. O.

5) M. L. E. Oliphant, a. a. O.; M. L. E. Oliphant u. O. B. Moon, a. a. O.; A. L. Klein, Phys. Rev. 26. S. 800. 1925; M. Healea u. E. L. Chaffee, Phys. Rev. 49. S. 925. 1936.

20 Volt Elektronen bei Benutzung von He-Trägern von über 200 Volt. Derselbe Verfasser findet auch einen großen Unterschied in der Elektronenauslösung durch Alkaliträger gegenüber der durch Edeltgas-träger, was er mit der ziemlich großen Differenz der Trägerbildungsspannungen dieser beiden Elementgruppen erklärt. — Im Gegensatz hierzu ergibt sich bei der vorliegenden Untersuchung das Auftreten einer schnellen Elektronengruppe *auch* bei Alkaliträgerbestrahlung, während sonst, besonders was das Schmalwerden der langsamen Elektronengruppen betrifft, Übereinstimmung herrscht. Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß in neuester Zeit auch von M. Healea und E. L. Chaffee¹⁾ ähnlich hohe, von den Verfassern nicht näher betrachtete Elektronengeschwindigkeiten (bis 50 Volt) beobachtet worden sind, wie aus ihren Kurven und Angaben zu schließen ist. Die Arbeiten an durchstrahlten Folien²⁾ zeigen dagegen an der Austrittsseite der Träger sehr viel größere Elektronengeschwindigkeiten bis zu 140 Volt.

Mit der Entgasung hängt auch die Frage nach der *unteren Erregungsgrenze* (Mindestprimärenergie) zusammen, so daß es nicht sehr verwunderlich ist, wenn gerade in dieser Beziehung die Ergebnisse am meisten auseinandergehen. Während die ältesten Arbeiten an unentgasten Schichten hierüber sehr kleine Geschwindigkeiten ergeben (etwa 20 Volt), finden die neueren ebenso wie vorliegende Untersuchung bei beheizten Schichten bedeutend höhere Werte (bei uns über 100 Volt an Pt). Auch hier scheinen wieder Träger mit großer Trägerbildungsspannung schon bei viel geringerer Energie Elektronen zu befreien (bis zu 7 Volt herab).

Die bei der *Trägerreflexion* gefundenen Geschwindigkeiten lassen sich gut mit den bekannten Untersuchungen dieses Gebiets in Einklang bringen. Es scheinen sich die von Gerthsen³⁾ zuerst mit einer optischen Methode gemachten Beobachtungen, die auf einfache elastische Stöße hindeuten, und die später von Gurney und Longacre⁴⁾ unternommenen ausführlichen Arbeiten mit gleicher Deutung auch hier zu bestätigen. Wie aus den im vorhergehenden Kapitel besprochenen Kurven 12 und 13 hervorgeht, können die K-Träger an dem viel schwereren Platin ihre ganze Energie zurückbekommen, während die an dem leichteren Al reflektierten fast $\frac{2}{3}$ ihrer Energie verlieren.

1) M. Healea u. E. L. Chaffee, a. a. O.

2) G. Schneider, Ann. d. Phys. [5] 13. S. 357. 1931.

3) Ch. Gerthsen, Phys. Ztschr. 31. S. 948. 1930.

4) R. Gurney, a. a. O.; A. Longacre, Phys. Rev. 46. S. 407. 1934.

11. Theoretische Betrachtung zu den Versuchsergebnissen

Die vorliegenden Messungen haben gezeigt, daß beim Auftreffen von Trägern auf Metalle zunächst ebenfalls die gleichen geringen und von der Primärenergie im wesentlichen unabhängigen Elektronengeschwindigkeiten auftreten, wie sie bei der Erregung durch Kathodenstrahlen schon lange bekannt sind, was einen Ablösevorgang anzeigt, der mehr für den erregten Stoff charakteristisch ist als für die benutzte primäre Strahlart. Es liegt hier offenbar derjenige überwiegende Vorgang vor, der einer in abgemessenen, relativ kleinen Beträgen seitens eines Strahlträgers an eine Vielzahl nacheinander von ihm durchquerter bzw. getroffener Atome übertragenen Energie entspricht, und der durch einfache Stoßbetrachtungen nicht gedeutet werden kann.

Hervon hebt sich deutlich eine daneben auftretende Gruppe mit höheren Geschwindigkeiten ab, die eine auffallende Abhängigkeit von der Primärenergie besitzen und so große Werte annehmen, daß der Gedanke naheliegt, hier das Ergebnis eines unelastischen Einzelstoßes anzunehmen.

Die Auffassung, daß die älteren Untersuchungen durch Stoßbetrachtungen verständlich zu machen seien, liegt von verschiedener Seite vor. Zu den Arbeiten von J. Hahn¹⁾ und G. Schneider²⁾ wird der Stoß der positiven Träger mit freien Metallelektronen für die Erscheinung verantwortlich gemacht, während K. Sommermeyer³⁾ — unter Hinzunahme einer eigenartigen Vorstellung von einer notwendig vorausgehenden Zerstäubung des Metalls — eine Energieübertragung an das ganze Atom annimmt. Wir können weder die eine noch die andere Auffassung als ausreichend für das Verständnis unsrer Beobachtungen ansehen.

Ebensowenig können die Vorstellungen, die von Oliphant und Moon⁴⁾ zur Deutung ihrer Messungen geäußert worden sind, als befriedigend angesehen werden. Mit ihrer Forderung, daß die Trägerbildungsspannung des erregenden Trägers, die Austrittsarbeit des beschossenen Stoffs und die Energieverteilung der freien Metallelektronen für die Austrittsgeschwindigkeiten der Elektronen maßgebend seien, sind unsere Befunde jedenfalls nicht befriedigend deutbar. Man könnte allerdings versuchen, dieselben mit den Ergebnissen derjenigen Untersuchungen zu vergleichen, welche sich auf

1) J. Hahn, Ztschr. f. Phys. 14. S. 355. 1923.

2) G. Schneider, Ann. d. Phys. [5] 1. S. 357. 1931.

3) K. Sommermeyer, Ann. d. Phys. [5] 25. 505. 1936.

4) M. Oliphant u. P. B. Moon, a. a. O.

die Ermittlung der Trägerbildungsspannung in Gasen bei Erregung durch positive Träger beziehen¹⁾. Jedoch scheinen uns hierfür noch nicht genügend gesicherte Gesichtspunkte für eine befriedigende quantitative Beschreibung der Erfahrung vorzuliegen.

Auf weitere, den Energieaustausch zwischen freien Atomen bzw. Molekülen im wesentlichen auf quantenmechanischer Grundlage behandelte theoretische Untersuchungen²⁾ hoffen wir im Zusammenhang mit erweiterter Erfahrung später eingehen zu können.

12. Zusammenfassung

1. Ein massives Kupferplättchen, eine Aluminiumfolie und eine durch Kathodenzerstäubung erzeugte, dünnste Platinschicht werden mit Kaliumträgern geringer Geschwindigkeit (70—1140 Volt) beschossen. Die Geschwindigkeit der rückläufig senkrecht austretenden Elektronen und der reflektierten Träger wird mit der Gegenfeldmethode unter besonderer Beachtung der Feldfreiheit des Entstehungsraums untersucht.

2. Der Einfluß von Kontaktpotentialen und feldfreiem Versuchsraum wird eingehend diskutiert. Aus der Messung des Kontaktpotentials wird auf das Entstehen einer Alkalischicht bei unausgeheiztem Plättchen geschlossen. Dies verlangt zur Erzielung eines einheitlichen Schichtmaterials die systematische Durchführung von Ausheizungsversuchen, welche gleichzeitig Aussagen über den Einfluß eines Gasgehalts der Schichten ermöglicht. Die Entgasung kann bei den äußerst dünnen Pt-Schichten am weitesten geführt werden.

3. Ausheizen der Schichten setzt die Elektronenemission herab, vergrößert die Trägerreflexion und läßt die vorhandenen Geschwindigkeitsgruppen der Elektronen stärker hervortreten.

4. Die erregten Elektronen lassen sich nach ihrer Geschwindigkeit in 2 Gruppen einteilen:

a) Eine Gruppe kleiner Geschwindigkeit, die bei allen benutzten Primärenergien überwiegend zwischen 1 und 3 Volt liegt. Es sind dies die gleichen Geschwindigkeiten, die bereits bei Erregung durch primäre Kathodenstrahlen gefunden sind.

b) Eine Gruppe mit größeren, auf ein relativ enges Gebiet beschränkten Geschwindigkeiten, die im Falle des Platins bei 280 Volt

1) O. Beeck u. L. Mouzon, *Ann. d. Phys.* [5] 11. S. 858. 1931; M. Nordmeyer, *Ann. d. Phys.* [5] 16. S. 706. 1933; K. Becherer, *Dissertation Heidelberg* 1935.

2) J. Frenkel, *Ztschr. f. Phys.* 58. S. 794. 1928; O. K. Rice, *Phys. Rev.* 38. S. 1943. 1931; P. M. Morse, *Rev. Mod. Phys.* 4. S. 577. 1932; E. C. G. Stueckelberg, *Helv. Phys. Act.* 5. S. 169. 1932.

Trägerenergie zwischen 16 und 19 Volt liegen und mit wachsender Trägerenergie zu höheren Werten ansteigen (50 Volt bei 1100 Volt primär).

5. Die Geschwindigkeit der schnelleren Elektronengruppe ist bei verschiedenen Metallschichten verschieden. Al lieferte schnellere Elektronen als Pt.

6. Es ist offenbar anzunehmen, daß die beiden Elektronengruppen einem verschiedenen Auslösemechanismus zugehören. Wir betrachten die langsamere Gruppe als das Ergebnis einer Vielzahl aufeinanderfolgender, mit jeweils geringer und lediglich vom Atom ausgewählter Energieübertragung verbundener Stöße. Die schnellere Gruppe dagegen führen wir auf einen mit größerer und von der Primärgeschwindigkeit abhängiger Energieübertragung verbundenen unelastischen Einzelstoß zurück.

7. An Platin reflektierte Kaliumträger können fast ihre ganze Primärgeschwindigkeit zurückerhalten, während das an Aluminium nicht der Fall ist.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung von Herrn Prof. Dr. A. Becker im Philipp-Lenard-Institut der Universität Heidelberg unternommen und durchgeführt.

Meinem verehrten Lehrer danke ich herzlich für die mir zuteil gewordene Unterstützung und seine stete Bereitschaft, mir bei allen Überlegungen behilflich zu sein.

Heidelberg, Philipp-Lenard-Institut der Universität.

(Eingegangen 25. März 1937)

Druckfehlerberichtigung

In der Notiz von Rudolf Ladenburg: „Die heutigen Werte der Atomkonstanten e und h “ (Ann. d. Phys. [5] 28. S. 458—464. 1937) ist die Dimension der Planckschen Konstante h auf den S. 458, 461, 462 und 464 in „erg·sec“ abzuändern (an Stelle von „erg/sec“ bzw. cm) und die der Sommerfeldkonstante

$\frac{hc}{2\pi e^2}$ beigefügte Dimension „cm“ zu streichen.

(Eingegangen 2. April 1937)

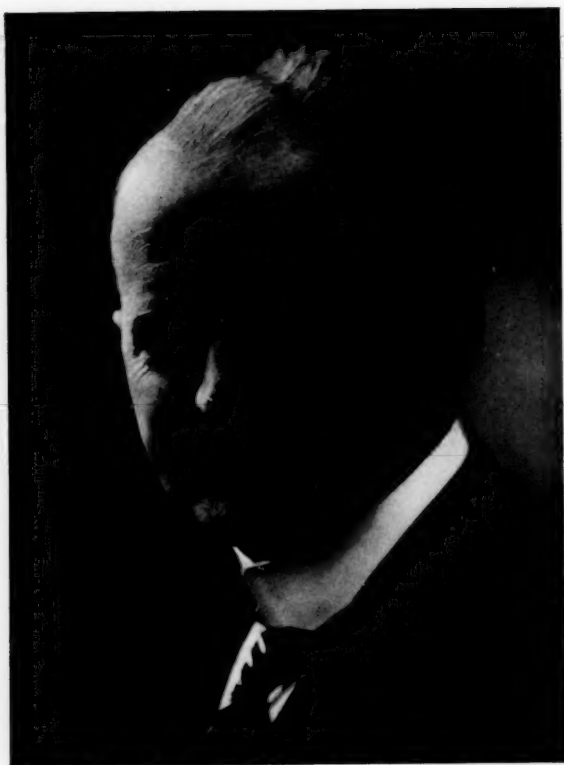


Photo-Maus, Marburg

E. Guinevism



EDUARD GRÜNEISEN

ZUM 60. GEBURTSTAGE

Am 26. Mai 1937 vollendet EDUARD GRÜNEISEN sein 60. Lebensjahr. Seit dem allzu frühen Tode Wilhelm Wiens leitet er die Herausgabe der Annalen und hat sich in den 9 Jahren dieser Tätigkeit durch seine reiche Erfahrung, durch die Unbestechlichkeit seines Urteils und durch die peinliche Gewissenhaftigkeit seiner Geschäftsführung in der physikalischen Fachwelt eine Vertrauensstellung erworben, die ihm die Möglichkeit gab, die Leistungen dieses angesehenen Organs der physikalischen Literatur in schwierigen Zeitläuften nicht nur auf der bisherigen Höhe zu halten, sondern ihm auch neue Freunde zu gewinnen.

Um ihren Glückwünschen für den Gefeierten auch einen sichtbaren Ausdruck zu geben, hat sich eine Anzahl

seiner Kollegen und Schüler verbunden, ihm das vorliegende, mit seinem Bildnis geschmückte Heft als Geburtstagsgabe darzubringen. Mit ihnen fühlen sich alle Physiker, die an den Annalen Interesse haben, einig in der Hoffnung, daß es ihm vergönnt sein möge, noch lange Jahre hindurch in gleicher Frische und Arbeitskraft wie bisher seines wichtigen Amtes zu walten.

Kuratorium und Verlag
der Annalen der Physik